ISSN: 2448 - 6574

Análisis de curvas de respuestas al *ítem*. Una propuesta de evaluación conceptual en ciencias.

Irvin Díaz Hidalgo
irvindiazh@comunidad.unam.mx

Universidad Nacional Autónoma de México.

Área temática: Evaluación del aprendizaje y del desempeño escolar.

Resumen.

El objetivo del trabajo es proponer una técnica de evaluación para el entendimiento conceptual de las ciencias. En palabras de Zavala (2009), el entendimiento conceptual se ha convertido en una de las líneas de investigación más prolíferas en la investigación en educación de las ciencias, ya que los alumnos tienen *pre*-concepciones, es decir, modelos cognitivos que representan explicaciones no científicas de los fenómenos que les rodean, y que en ocasiones impiden el aprendizaje. En este orden de ideas, se diseñó un instrumento de evaluación (el *test* de opción múltiple) para analizar los modelos cognitivos que tienen los alumnos con respecto al concepto de "límite" en un primer curso de cálculo de una variable real de funciones reales. El reporte incluye el marco teórico que plantea y justifica la investigación, la metodología del trabajo experimental, los principales resultados a los que se llegó en la instrumentación del modelo de evaluación (haciendo énfasis en los principales modelos cognitivos de los estudiantes respecto al "teorema de los límites laterales", y a la relación de éste con la existencia de un límite), así como algunas conclusiones preliminares.

Palabras clave: evaluación, *pre*-concepciones, cálculo, límite.

Planteamiento del problema.

El concepto de límite es uno de los más complejos en la comprensión de los principales problemas y métodos del cálculo (Courant & Robbins, 2002). Como lo menciona Pita (1998), éste es el concepto sobre el cual descansan los dos pilares más importantes del cálculo: la derivada y la integral de una función. Asimismo, la noción de "límite de una función" es un concepto sobre el que los estudiantes tienen una gran cantidad de *pre*-concepciones o modelos cognitivos alternos que, desde el momento mismo en el que llegan al aula, en mayor o menor medida impiden su aprendizaje. En este sentido, un referente empírico recurrente en las investigaciones que reporta la literatura (Blázquez & Ortega, 2006; Cornu, 1983; Fernandez, 2004; Przenioslo, 2004; Vrancken & Gregorini, 2006, Sierpinska, 1987) es el bajo rendimiento y aprovechamiento que presentan los alumnos en temas fundamentales de la matemática de los cambios, como el concepto de derivada, el concepto de integral, las series de Taylor, etc., derivado sobre todo de las deficiencias que presentan los estudiantes en el aprendizaje del concepto de “límite de una función” y que devienen en la falta de reconocimiento de situaciones límite como las referenciadas anteriormente.

Por lo anterior, si se desea modificar el modelo educativo que prevalece actualmente, sobre todo en el nivel superior (en donde recientemente se ha investigado desde una mirada conceptual, más que procedimental) y lograr una verdadera comprensión por parte de los estudiantes de los fundamentos del cálculo, resulta imperioso el evaluar con precisión cuáles son los modelos de pensamiento alternativos más recurrentes que muestran los alumnos respecto al “límite de una función” en el nivel universitario. En este orden de ideas, el problema de investigación, como relación o vínculo que liga los constructos anteriormente descritos, quedó planteado de la siguiente manera: ¿Cuáles son las *pre*-concepciones dominantes de los estudiantes de nivel superior respecto al concepto de “límite de una función”, en un primer curso de cálculo de una variable real de funciones reales?

Justificación.

De los párrafos anteriores se pueden reconocer dos hechos incontrovertibles. El primero, que el concepto de límite es uno de los más importantes en el estudio del cálculo y de toda la matemática superior (Artigue, 1998; Cornu, 1983; Pita, 1998; Sierpinska, 1987; Vrancken & Gregorini, 2006, Tall & Vinner, 1981). En efecto, el “límite” como objeto de aprendizaje ha sido una problemática estudiada sobre todo por los docentes de educación superior, quienes han encontrado en él un obstáculo epistemológico para la enseñanza del cálculo.

Y el segundo, la importancia de las *pre*-concepciones de los estudiantes en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias. Estos modelos de pensamiento alterno (no científicos) pueden ser estudiados y comprendidos a través de estudios de evaluación del entendimiento conceptual.

ISSN: 2448 - 6574

En este sentido, conocer los principales modelos de pensamiento de los estudiantes respecto al concepto de límite, así como el impacto de éstos en el aprendizaje, permitirá mejorar significativamente el diseño instruccional, la enseñanza, y el aprendizaje del cálculo.

Fundamentación teórica.

Para el análisis de las *pre*-concepciones y modelos cognitivos por parte de los estudiantes se planteó una propuesta de trabajo basada en un modelo de evaluación en enseñanza de las ciencias: el *test* de opción múltiple. El análisis consistió en una técnica de evaluación propuesta por Morris, *et al* (2006), llamada "análisis de las curvas de respuestas al *ítem*" (IRC, por sus siglas en inglés). Siguiendo a Ding, *et al*, (2006), en este modelo de evaluación se analizan índices de dificultad, de discriminación y de aleatoriedad para las respuestas de los alumnos a los *ítems*.

El índice de dificultad muestra la razón entre el número de respuestas correctas y el número total de alumnos que contestaron un determinado *ítem*. El índice adopta valores en un intervalo de cero a uno. Cuando el índice se acerca a uno la dificultad del reactivo es baja y, por el contrario, cuando el índice es cercano a cero la dificultad del reactivo es alta. Ding, *et al* (2006), consideran que los extremos deben evitarse, tanto en el valor de cero (en donde nadie puede responder el *ítem*), como en el valor de uno (en donde todos lo contestan correctamente).

Por su parte, el índice de discriminación puede ayudar a separar a los alumnos de alto rendimiento (que conocen y comprenden razonablemente el material que se evalúa), de aquellos de bajo rendimiento (que desconocen el material) (Ding, *et al*, 2006). Así, el cálculo del índice requiere que los resultados se agrupen como una serie ordenada de datos en donde la mediana, como medida de tendencia central, permite discriminar al 50% de los alumnos que obtuvieron las menores calificaciones, del 50% restante que obtuvo las calificaciones más altas. El índice toma valores entre menos uno y uno, y es recomendable evitar los valores negativos. En este sentido, un examen con un índice de discriminación alto indicaría que los alumnos más destacados obtienen las calificaciones más altas. Por su parte, un *test* con un índice de discriminación bajo podría guiar a los mejores estudiantes a contestar incorrectamente, y a los alumnos más atrasados a obtener calificaciones más elevadas.

Finalmente, el índice de aleatoriedad (o de correlación biserial) representa la probabilidad de responder correctamente el *ítem* al azar. Por lo tanto, a mayor índice de aleatoriedad, mayor será la probabilidad de que un alumno con bajas habilidades y cuyo resultado en el examen sea bajo, conteste el reactivo correctamente. En este sentido, los valores del índice de aleatoriedad tendrían que ser menores o iguales a la probabilidad (bajo un enfoque clásico) de obtener la respuesta correcta al azar. En el caso del test que nos ocupa, al tener la pregunta cinco opciones, el índice debería ser igual o menor a 0.20.

Objetivos.

El objetivo principal de la investigación fue el evaluar las principales *pre*-concepciones que tienen los alumnos universitarios sobre el concepto de límite de una función, en el marco de un curso introductorio de Cálculo de una variable.

Asimismo, se establecieron dos objetivos específicos de la investigación. Primero, se pretendió conocer el grado en que estos modelos cognitivos o *pre*-concepciones alternas que presentan los estudiantes favorecen u obstaculizan su aprendizaje. Segundo, se buscó que la investigación permitiera el diseño de un instrumento de reconocimiento y evaluación de las *pre*-concepciones de los estudiantes sobre el concepto de límite de una función, con el propósito de conocer los efectos de la enseñanza programada en dichas preconcepciones.

Metodología.

La investigación experimental se realizó en el mes de septiembre del primer semestre del ciclo escolar 2017-2018. El instrumento de evaluación se aplicó, en todos los casos, a alumnos del primer semestre del tronco común de la Facultad de Ingeniería de una Institución de Educación Superior, ubicada en el Noroeste de México. Durante la primera semana del mes de septiembre se diseñó un *test* de carácter conceptual que evaluara los modelos cognitivos que tienen los alumnos respecto al concepto de "límite" en un primer curso de cálculo. El tema ya había sido explicado a los alumnos con anterioridad. El *test* se conformó de 25 reactivos de opción múltiple, de los cuáles cinco reactivos fueron diseñados por el autor e insertados aleatoriamente en el cuerpo del examen. Posteriormente, el instrumento se aplicó a 100 alumnos a quienes se les explicó el objetivo del examen y se les entregó un cuadernillo y una hoja de respuestas elaborada para el efecto. Se les permitió a los alumnos utilizar su calculadora, aunque se les

ISSN: 2448 - 6574

explicó que la mayoría de las preguntas intentaban medir la conceptualización del límite de una función, más que habilidades procedimentales.

Resultados.

A partir del espacio disponible, no es posible referenciar la totalidad de los resultados. Sin embargo, se muestran los resultados obtenidos de las respuestas de los estudiantes de dos *ítems*, relacionados principalmente con el teorema de los límites laterales y la existencia de un límite en un intervalo abierto. El *ítem* número dieciséis se transcribe a continuación.

Sea la función $f(x) = \frac{1}{x}$ *que se muestra en la gráfica ¿cuál es el límite de la función cuando x tiende a cero?* La respuesta correcta a esta pregunta era el inciso b.

1) = 0
2) = ∞ (no existe)
3) La gráfica mostrada no corresponde a una función.
4) = 1
5) La gráfica no permite concluir respecto al límite.

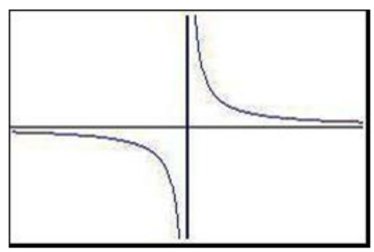

Figura 1. Ítem *16 (elaborada por el autor).*

En la figura 2 se muestra que los estudiantes con la mayor habilidad contestaron la pregunta adecuadamente, por lo que el índice de discriminación es bajo y permite diferenciar a los alumnos que conocen el concepto de aquellos que no. La pregunta obtuvo un índice de dificultad medio por lo que se consideró medianamente difícil para los alumnos y bien diseñada. En lo que se refiere al índice de aleatoriedad se observó que éste es bajo, es decir, menor a la probabilidad de escoger una respuesta al azar, que es del 0.20. Por lo anterior, también en este rubro el *ítem* se considera una pregunta bien diseñada.

ISSN: 2448 - 6574

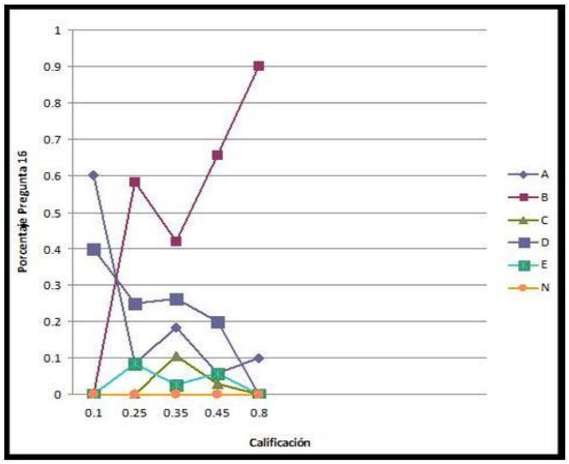

Figura 2. Curva IRC de la pregunta 16 (elaborada por el autor).

Respecto a las preconcepciones de los alumnos, resultan muy interesantes los modelos 1 y 4, contestados principalmente por los estudiantes con muy baja habilidad. Sobre todo el modelo 1, en donde el límite de la función es cero, permite concluir que los alumnos no utilizan la gráfica de referencia para su análisis ,y aún más delicado, que estos alumnos consideran que la división entre cero es un número real. Sin embargo se observa que, en los dos casos, a mayor habilidad en los alumnos cada vez menos estudiantes se inclinan por estas dos opciones incorrectas. El reactivo número 25 se transcribe a continuación.

Sea la función f(x) que se muestra en la gráfica ¿cuál es el límite de la función cuando x se aproxima por la izquierda a 1? La respuesta correcta a esta pregunta era el inciso *a*.

1) = 3
2) El límite no existe por la izquierda.
3) La gráfica mostrada no corresponde a una función.
4) = 1
5) La gráfica no permite concluir respecto al límite.

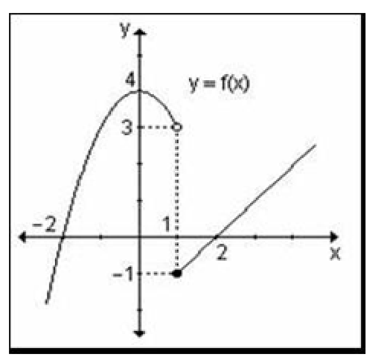

Figura 3. Ítem *25 (elaborada por el autor).*

En la figura 4 se muestra que los alumnos contestan con un índice de discriminación bajo, lo cual es muy satisfactorio en términos del entendimiento del concepto de límite de una función (y no el valor de la función en un punto *a*). El índice de dificultad no es muy bajo, por lo que se puede concluir que el reactivo no resultó muy difícil para los alumnos. Sin embargo, se observó que el índice de aleatoriedad si es más alto que la probabilidad de haber respondido al azar (0.4), lo que debe ser corregido para que el reactivo se considere un buen *ítem* de opción múltiple.

En estas respuestas se observa una preconcepción muy definida por parte de los alumnos a pensar que, o bien la función no existe, tal vez porque la gráfica muestra dos modelos de función que para ellos obviamente no son iguales (una parábola y una función lineal), o bien, la gráfica no permite concluir respecto al límite, tal vez porque los límites laterales no son iguales. En ambos casos, con independencia de la falta de conocimiento sobre funciones definidas por intervalos, a medida que se observa mayor habilidad en los estudiantes, estas respuestas incorrectas son desechadas por los alumnos.

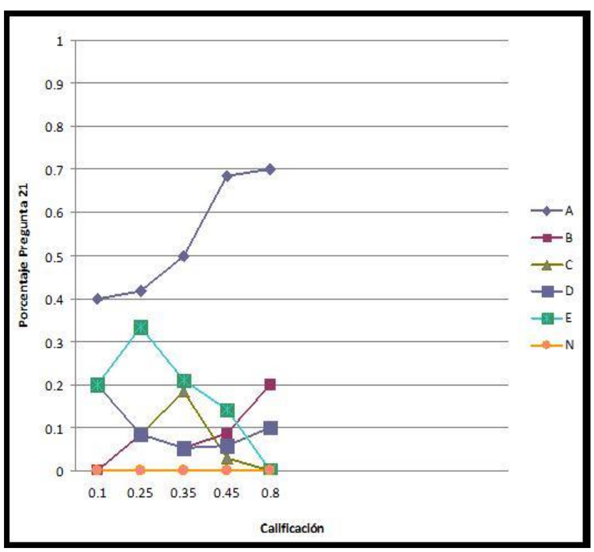

Figura 9. Curva IRC de la pregunta 25 (elaborada por el autor).

ISSN: 2448 - 6574

Conclusiones.

Después de implementar el instrumento de evaluación que se explicó a lo largo de este trabajo, se coincide con Przenioslo (2004) en el hecho de que en el análisis de las respuestas de los alumnos, respecto al concepto de límite, se pueden observar muchos modelos cognitivos.

La mayoría de los alumnos tienden a pensar que el cálculo de un límite es la sustitución numérica de la función en el punto al que tiende la variable independiente. Esta conclusión es congruente con la literatura revisada. Vrancken & Gregorini (2006) señalan que una de las principales dificultades relacionadas con "el concepto de límite" es la de comprender que el cálculo del límite no siempre es por sustitución. En este sentido, el análisis geométrico del comportamiento de una función en un intervalo abierto permitiría entender, no sólo el concepto de límite de una función, sino además, los conceptos de discontinuidad en un punto, y la clasificación de estas discontinuidades en evitables y no evitables.

Otro problema que presentan los alumnos es su incapacidad para explicar la existencia de un límite a través del teorema de los límites laterales, en donde el análisis geométrico del comportamiento de la función, tanto por la derecha como por la izquierda, permite conocer el límite de la misma cuando la variable independiente tiende a un punto *a*.

En este mismo orden de ideas, los alumnos no pueden representar funciones en donde los límites laterales no son iguales, y por lo tanto, el límite de la función en un punto dado no existe.

Comparando esta conclusión con los resultados que se presentan en la literatura, se puede afirmar que otro de los principales problemas de los alumnos es la dificultad para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario, y además, la problemática para entender que el límite de un función es el comportamiento de la función cerca de un punto dado de su dominio (del valor en *a*) y no "en" el punto.

Finalmente, los alumnos no comprenden la naturaleza de las variables de una relación funcional. De hecho, algunos alumnos no tienen claro el concepto de función, y por lo tanto, no pueden expresar el comportamiento de la función cuando la variable independiente de la misma se acerca tanto por la derecha como por la izquierda a un valor a en un intervalo abierto.

Respecto a las limitaciones que se tuvieron en el desarrollo de la investigación cabe señalar que, en el orden de lo metodológico, y dada la muestra tan pequeña que se utilizó, en el *test* de opción múltiple los parámetros de discriminación, de dificultad y de aleatoriedad fueron comentados en términos más cualitativos que cuantitativos, es decir, se discutió más la forma de la pregunta y no el cálculo real de los parámetros, pues para ello se hubiera requerido de una muestra más grade, asignar la calificación de acuerdo al número de preguntas correctas (y no a través de intervalos de clase) y hacer una ajuste de curvas para poder hacer los parámetros comparativos.

Referencias.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y Aprendizaje del Análisis Elemental. ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares*? Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *1 (1)*, pp. 40-55.

Blázquez, S. y Ortega, T., (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. Congreso Internacional de Educación Matemática ICME-8, Sevilla, España, en *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 331-354). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Tesis Doctoral, Université Scientifique et Médicale: Grenoble, France.

Courant, R., y Robbins, H., (2006). *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales.* México: Fondo de Cultura Económica.

Ding, L., *et al* (2006). Evaluating an electricity and magnetism assessment tool: Brief electricity and magnetism assessment. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, *2*. Recuperado el 31 de enero de 2018 de http://prst-per.aps.org/abstract/PRSTPER/v2/i1/e010105.

Fernandez, E. (2004). The students' take on the epsilon-delta definition of a limit. *Primus: Problems Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 14* (1), pp. 43-54.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4a. ed.). México: McGraw Hill.

McDermott, L. & Shaffer, P. (1992). Research as a guide for curriculum development: An example from introductory electricity. Part 1: Investigation of student understanding. *American Journal of Physics, 60 (11)*, pp. 994-1003.

Morris, G., *et al* (2006). Testing the test: Item response curves and test quality. *American Journal of Physics*, *74 (5)*, pp. 449-453.

Pita, C. (1998). *Cálculo de una variable.* Distrito Federal, México: Prentice Hall.

Prezenioslo, M. (2004). Images of a limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics, 55*, pp. 103-132.

Salloum, S. & BouJaoude, S. (2007). Careful! It is H2O? Teacher's conceptions of chemicals. *International Journal of Science Education*, *30 (1)*, pp. 33-64.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, pp. 371-397.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, pp. 151-169.

Vrancken, S. & Gregorini, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Premisa. Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática, 29 (8)*, pp. 9-19.

Zavala, G. (2009). Técnicas de análisis para la educación de las ciencias. *Memorias del la REDIIEN 2008*. Monterrey, México.