Contraste entre el dominio del conocimiento matemático escolar y el pensamiento matemático avanzado en un grupo de alumnos con aptitudes sobresalientes

Gilberto Castillo Peña¹ gil29095@hotmail.com

Miguel Ceja Cruz²
miguel.ceja@sepdf.gob.mx
mcejac@gmail.com

Carmela Sánchez Rodríguez³ amen_877@hotmail.com

Escuela normal Superior de México

Área temática: Reportes, parciales o finales, de investigación con referente empírico.

Resumen

En el artículo se reportan los resultados de una evaluación diagnóstica aplicada a un grupo de estudiantes que, en el momento de hacer la investigación, se encontraban estudiando en la ESANS todos ellos fueron diagnosticados por expertos como personas con aptitudes sobresalientes. Se efectuó un examen para detectar el dominio de contenido matemático, las habilidades propias de la disciplina en la resolución de ejercicios y problemas, así como sus potencialidades en cuanto a lo que se denomina Pensamiento Matemático Avanzado. Los resultados permiten reconocer problemáticas específicas en el dominio de los conocimientos escolares e identificar la existencia de tópicos propios del pensamiento matemático avanzado.

Palabras Clave: aptitudes sobresalientes, pensamiento matemático avanzado.

¹ Escuela Normal Superior de México. Coordinador de Maestrías de ENSM.

² Dirección General de Educación Normal y Actualización del Magisterio. Supervisor de escuelas anexas a las escuelas normales de la Ciudad de México.

³ Escuela Secundaria Anexa a la Normal Superior de México. Asesora del grupo piloto.

Planteamiento del problema

Desde los años 80, en México, se comenzó a visualizar una población que requería atención especializada, en el marco de lo que después sería denominado *inclusión educativa*, Enríquez & Arredondo (2018) destacan que desde la Dirección de Educación Especial (DEE) se establecieron las primeras definiciones relacionados con estudiantes con Capacidades Sobresalientes, en ese sentido, aparecen nociones como: superdotado, capacidades intelectuales superiores, talento en un área específica y las Aptitudes Sobresalientes (AS); esta última, se constituye en la forma en que el estado mexicano identifica a esta población.

La Secretaría de Educación Pública (SEP/DEE, 1980), citada por Enríquez & Arredondo, reconoce que "los superdotados y los alumnos con deficiencia mental constituyeron los dos extremos de la conceptualización de la inteligencia en el ámbito escolar" (2018: 195). Los mismos autores, citan un documento normativo, en el que por primera vez se reconoce la necesidad de ocuparse a una población que requiere atención especializada, desde esa mirada se denominan *superdotados*.

Margarita Gómez Palacio y un grupo de colaboradores, citados por Enríquez & Arredondo (2018), hace uso en la prueba WISC-R para intentar identificar estudiantes con capacidades intelectuales superiores en una población de estudiantes de primero y segundo grado en escuelas primarias del Distrito Federal, los resultados de la investigación permiten observar que "la psicometría reforzó la medición de la inteligencia; segundo, la mirada urbana y de algunas escuelas públicas de la Ciudad de México fueron presentadas como evidencias de la inteligencia de niños y niñas de todo el país y tercero, el concepto de capacidades y aptitudes sobresalientes se equiparó con el de capacidad intelectual <<muy superior>> generando ambivalencias" (p. 198). Es posible profundizar en el estudio de la evolución de los programas en los artículos de Enríquez & Arredondo (2018) y Canché, Simón & Farfán (2010).

Desde los años 80 se han realizado esfuerzos por definir una población que se distingue por sus capacidades superiores, Canché, Simón & Farfán hacen un recuento de la siguiente forma:

Cada una de ellas enmarca corrientes relativas al surgimiento de los diferentes modelos de inteligencia. Se parte desde una postura en la cual el rendimiento académico es una expresión directa de la inteligencia, después se cambia el paradigma hacia una visión propia de las actividades, es decir, que la inteligencia estaba en relación directa con la actividad que se llevara a cabo, que es donde se enmarca la diferencia entre talento y superdotación. Posteriormente



esta corriente se vuelve aún más nítida, cuando se empieza a entender a la inteligencia dentro de un contexto más dinámico, es decir, desarrollable a lo largo de la vida y ya no innato a la persona por nacimiento. (2010: 8)

En la actualidad, la SEP define a la población con AS como: "Alumnos capaces de destacar significativamente del grupo social y educativo al que pertenece, en uno o más de los siguientes campos del quehacer humano: científico - tecnológico, humanístico - social, artístico y motriz" (SEP, 2018). Es necesario decir que el gobierno federal distingue otra definición, los niños talento son aquellos que tienen altas habilidades en campos específicos, como la matemática o el arte.

En Panorama Educativo 2016 (INEE, 2017) se reconoce que en el Sistema Educativo Nacional existen espacios que son destinados para la atención de la población que es diagnosticada con AS, de esta forma, en los Centros de Atención Múltiple existen programas que potencian su formación, sin embargo, no ofrece estadísticas con las que pueda establecerse el número de personas que se han atendido en el periodo de evaluación reportado. De hecho, en ninguna de las publicaciones de Panorama Educativo que el Instituto Nacional de Evaluación tiene en línea, y que corresponden al sexenio actual, se encontró alguna tipo de estadística que permita el análisis de la situación de los planteles.

La Dirección de Educación Especial (DEE) destaca que en 2006 existían 22,695,000 alumnos de educación básica, de los cuales 404, 608 tenían algún tipo de discapacidad o presentaban las características de AS (SEP, 2006: 29), específica que en educación primaria se atendían 17,590 estudiantes, de los cuales 8,549 eran niños y 9,041 niñas, todos ellos con Aptitudes Sobresalientes. Para profundizar en el tema de los estudiantes con AS, sobre los programas y protocolos de atención, se invita al lector a visitar la página de la DEE.

En este marco, en el ciclo escolar 2017 - 2018, se informó a la dirección de la Escuela Secundaria Anexa a la Escuela Normal Superior de México (ESANS) que se integraría un grupo de estudiantes con características propias de AS, todos diagnosticados por personal especializado, provenientes de escuelas secundarias de la Ciudad de México, por lo que se capacitó al personal directivo en la Dirección de Innovación y Fortalecimiento Académico, en el contexto del Proyecto Piloto sobre la Autonomía de Gestión en el Nuevo Modelo Educativo. Se prefirió utilizar una organización de grupo multigrado, en el que se esperaba que al tener contacto con distintos niveles de contenido, los estudiantes fueran capaces de potenciar sus



aptitudes. Los docentes que fueron invitados a participar provienen de escuelas secundarias de la Ciudad de México y han recibido capacitación durante el transcurso del proyecto.

Las autoridades educativas de la ESANS solicitaron al personal responsable del programa evaluar a los estudiantes acerca de sus conocimientos y habilidades en matemáticas, por lo que se estableció una estrategia que permita tomar decisiones académicas y operativas. En el presente documento se reportan los resultados de esta evaluación formativa, ya que se considera que es importante socializar las conclusiones del estudio con la comunidad científica.

Justificación

En el Acuerdo secretarial 27/12/17 se establece que los estudiantes con AS se encuentran en una situación de vulnerabilidad, ya que aún cuando tienen condiciones que podrían ser consideradas privilegiadas, su desarrollo integral puede ponerse en riesgo por las dificultades socio-emocionales que llegan a manifestar. Debido a que tienen facilidad en alguna área de conocimiento y habilidades específicas, pueden y deben ser encaminados a su fortalecimiento. Asimismo, se establece la necesidad de "impulsar nuevas formas de atención de inclusión" (DOF, 2017).

La exigencia de ampliar los espacios es justificada a partir de estimaciones que señalan que el 10% de la población escolar presenta AS y la infraestructura actual atiende únicamente el 0.94% de la población (DOF, 2018). A partir de estos planteamientos, se diseña el Proyecto Piloto sobre la Autonomía de Gestión en el Nuevo Modelo Educativo, en el cual se considera que la ESANS es un espacio natural para atender a ese tipo de población, en virtud de que las evaluaciones nacionales han mostrado que los estudiantes que asisten a la institución tienen resultados sobresalientes, por lo que se presupone que autoridades, docentes y estudiantes están habituados a emprender acciones para tener un alto desempeño.

Debido a lo anterior, las autoridades de la Dirección General de Educación Normal y Actualización del Magisterio (DGENAM) y la ESANS, consideran que es importante realizar investigación en el grupo piloto, registrar los elementos que permitan el análisis de la situación académica y su inclusión al plantel, asimismo, dar a conocer los resultados del proyecto. Es necesario decir, que la ESANS es el espacio natural de investigación de la Escuela Normal Superior de México, por lo que los resultados pueden beneficiar a los involucrados en la atención de estudiantes AS y a la comunidad de investigación en general.

Referentes conceptuales

Distintos autores de Matemática Educativa (Soto & Cantoral, 2014; Bolea, Bosch & Gascón, 2001; Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014; entre muchos otros) han utilizado el término *matemática escolar* para distinguir al conjunto de conceptos, habilidades, actitudes y valores que espera sean desarrollados durante en transito por la educación básica que hacen los estudiantes más jóvenes de la sociedad; su intención es distinguir la actividad realizada en las instituciones educativas de educación básica y la que se lleva a cabo en las universidades, en torno a la matemática como disciplina; ambas están relacionadas, sin embargo, un grupo importante de investigadores explican que existen diferencias sustantivas entre ellas. La *matemática escolar* puede ser caracterizada a partir de los planes y programas de estudio para los distintos niveles educativos.

El pensamiento matemático avanzado es un objeto de estudio de la Matemática Educativa desde los años 90, Azcárate & Camacho (2003) definen algunos de los aspectos relevantes que caracterizan el objeto de estudio de los investigadores del pensamiento matemático avanzado, los autores antes mencionados reconocen que muchos de los contenidos de la matemática universitaria se estudian desde los niveles de educación básica, pero en las instituciones de educación superior el pensamiento matemático se caracteriza por: la abstracción, el uso de distintas representaciones y la interpretación de los objetos matemáticos como una dualidad, conceptual y procedimental, por ejemplo, la noción de límite se entiende como un concepto pero sin ser separado del proceso que implica.

Objetivos

Los objetivos de la evaluación y de la investigación fueron:

- Evaluar los conocimientos y habilidades de los alumnos respecto de los contenidos matemáticos escolares.
- Evaluar habilidades de pensamiento matemático superior en los alumnos con AS
- Contrastar los resultados de ambas evaluaciones

Metodología

Para efectuar la evaluación del proyecto, se formó un equipo de investigación integrado por la asesora del grupo, el supervisor de las escuelas anexas a las escuelas normales de la Ciudad



de México y un docente investigador de la ENSM -autores del presente artículo-, se esperaba que la diversidad en el equipo evitará el sesgo en el análisis.

El grupo de altas capacidades que fueron evaluados se compone de 13 alumnos, 7 varones y 6 mujeres; los cuales se han clasificado por grado escolar: 7 alumnos de primer año, 4 de segundo y 2 de tercero, según las certificaciones que otorgó de la Secretaría de Educación Pública (SEP), provienen de escuelas de educación básica, pública y privada; dos de ellos optaron por transitar su formación básica en el sistema abierto o en certificaciones con un sólo examen, en virtud de las dificultades de integración con la población escolar que no tiene su perfil, decisión que fue responsabilidad de los tutores.

Para el estudio, se recurrió a una triangulación de información, o sea, los datos provienen de tres fuentes: observaciones del grupo, el examen de conocimiento elaborado por la docente responsable de la asignatura y un examen que permitiera evidenciar el pensamiento matemático avanzado. El presente artículo es un reporte parcial de la información que se obtuvo en el proceso de evaluación e investigación con estos alumnos.

El examen de conocimiento se construyó con base en los aprendizajes esperados de cada uno de los grados de secundaria hasta el cuarto bimestre, pues es el momento en que se recibieron a los alumnos. La segunda prueba pretende evaluar algunas habilidades matemáticas y se compone de preguntas que se obtuvieron de los exámenes de Olimpiada Matemática, mismas que desde su concepción buscan fomentar la imaginación y creatividad; además, incluye preguntas que pretenden identificar la existencia de habilidades de pensamiento matemático avanzado. Finalmente, es necesario especificar que las observaciones del grupo se realizaron durante las clases de matemáticas.

Resultados

Como resultados del primer instrumento de diagnóstico se detallan el dominio de los conocimientos conceptuales y procedimentales que forman parte del currículum de educación secundaria. Estos resultados se presentan en la Tabla 1 según los niveles de dominio, en el primer nivel están las áreas donde la mayoría de los alumnos contestaron correctamente, en el segundo nivel se da cuenta de los conocimientos parciales y el tercer nivel corresponde a los conocimientos erróneos o ausentes.



TABLA 1. Desempeño de los estudiantes del grupo piloto respecto del dominio de los contenidos curriculares

	Primer grado	Segundo grado	Tercer grado		
Conocimiento correcto	- Existe un dominio	- Existe un dominio	- Existen habilidades en la		
	conceptual y procedimental	conceptual y procedimental	identificación y		
	de las operaciones básicas	de las operaciones básicas	establecimiento de		
	en los números naturales:	en los números naturales.	estrategias para resolver		
	resuelven problemas donde	-Resuelven sumas y	problemas que implican		
	se requiere utilizar una o	multiplicaciones de	razonamiento proporcional,		
	más operaciones básicas.	monomios.	particularmente en la		
	- Utilizan notación científica	- Interpretan	determinación de las		
	para interpretar o	adecuadamente las	medidas en figuras		
	representar cantidades muy	situaciones representadas	semejantes y el cálculo de		
	grades o pequeñas.	en gráficas y construyen	porcentajes.		
	- Reconocen propiedades	gráficas de fenómenos de			
	de divisibilidad y	variación proporcional			
	multiplicidad de los	directa.			
	números naturales.	- Reconocen más de una			
	- Interpretan	forma de representar el			
	adecuadamente el	desarrollo plano de un			
	significado de fracción	cuerpo geométrico.			
	como parte-todo.	- Calculan adecuadamente			
		la probabilidad clásica de un			
		evento aleatorio sencillo.			
Conocimiento parcial	- Los alumnos conocen las	- Se reconocen	Existe un conocimiento		
	fórmulas de áreas y	cuadriláteros y polígonos	parcial sobre el teorema de		
	perímetros y las utilizan en	regulares por sus	Pitágoras, aunque los		
	preguntas de aplicación	características y	alumnos logran identificar		
	inmediata, pero si el	propiedades, se utilizan	que pueden utilizar esta		
	problema requiere de la	estas propiedades para	herramienta para calcular la		
ŭ	interpretación de	determinar la medida de	medida de un lado en un		

información no lo contestan.

También, existen errores en la ejecución de las operaciones.

- Respecto de la operación con números enteros, los alumnos tienen mayor éxito al resolver sumas y multiplicaciones, sin embargo, existe un alto porcentaje de error en las restas.

ángulos internos, pero no se consigue determinar la medida del ángulo central.

- Los alumnos son capaces de resolver operaciones con números naturales donde se utiliza sólo un signo de agrupación, sin embargo, no reconocen la necesidad de utilizar jerarquía de operaciones. triángulo rectángulo conociendo las otras, existen errores procedimentales, tanto en el planteamiento de la expresión como en la realización de las operaciones.

- Se desconocen los procedimientos que permiten ordenar o realizar operaciones con fracciones.
- No se consigue establecer la regla de una sucesión algebraica ni hacer una interpretación de la misma, esto da cuenta de una falta de domino algebraico que permita el uso de la variable como un número general que permita la deducción de reglas.
- Se reconocen cuadriláteros y polígonos regulares por sus características y propiedades, pero no se utilizan las mismas para determinar el valor de los ángulos en las figuras.
- Los alumnos son capaces de resolver operaciones con números naturales donde se utiliza un signo de agrupación, sin embargo, no reconocen la necesidad de utilizar jerarquía de operaciones. Por otro lado, cuando las operaciones implican más de un signo de agrupación o el uso de expresiones algébricas no

- Se desconocen las reglas de los productos notables y su factorización.
- No se establecen relaciones de igualdad o suplemento en los ángulos de cuadriláteros.
- Se desconocen los algoritmos que permiten resolver ecuaciones de segundo grado.
- No existe el transito de las representaciones algebraicas a las gráficas de funciones lineales y cuadráticas.
- Se desconocen las definiciones y operatividad de las razones trigonométricas.
- Se desconocen los

Falta de conocimiento o conocimiento erróneo



	se	resuelven	procedimientos que permiten				
	adecuadamente.		calcular	el	volumen	de	
			cilindros y conos.				

Es posible observar en los contenidos donde existen conocimientos adecuados, que en su mayoría de ellos pueden surgir de esquemas o mecanismos intuitivos. Tomemos como ejemplo el caso de las fracciones, cuando se trata de interpretar una fracción los alumnos pueden recurrir a un esquema intuitivo y lo hacen de forma correcta, sin embargo, cuando se debe operar con ellas se desconocen estos procedimientos, pues no todos son sencillos de inferir y generalmente son aprendidos en el ámbito escolar.

El examen de habilidades matemáticas y la observación en clase ha permitido dar cuenta de algunos procesos de pensamiento. En un primer momento el examen ayuda a distinguir que los alumnos consiguen observar regularidades, comparar, ordenar y relacionar información en un problema, además, de sistematizar dicha información para crear un procedimiento que ayude a resolver el mismo; esto nos permite concluir que los alumnos tienen un dominio de las operaciones elementales que constituyen los procesos básicos de pensamiento, considerando la clasificación propuesta por Sánchez (2002) quien explica que los procesos de pensamiento pueden agruparse y ordenarse de acuerdo con sus niveles de complejidad y abstracción en básicos, de razonamiento, superiores y metaprocesos.

Esta misma prueba permite identificar algunos procesos que participan en el desarrollo, no sólo de operaciones de pensamiento elementales sino del pensamiento matemático avanzado. Particularmente, Belmonte (2009) enumera algunos tópicos del currículo de matemáticas que apuntan a formas de pensamiento avanzado, como la introducción de la demostración, los procesos que implican infinitos, la noción de límite, etc. En las siguientes imágenes podemos observar la respuesta de los alumnos a preguntas que se relacionan con estos tópicos.

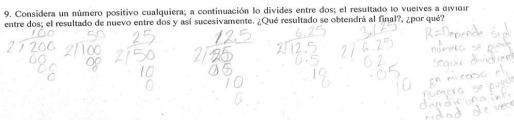


Ilustración 1. Pregunta sobre división indefinida



En la pregunta anterior, los alumnos hacen la interpretación de un proceso donde existe una división indefinida. Ninguno de los alumnos, explica este proceso como finito, sino que exponen que no pueden terminar de dividir e incluso explicitan que se trata de un trabajo infinito, pero ofrecen conclusiones parciales sobre sus resultados. Este tipo de respuesta nos da una imagen de que se tienen elementos básicos para la introducción en las nociones clásicas de límite.

Otra pregunta que nos da evidencia de formas avanzadas de pensamiento cuestiona a los alumnos sobre le resultado de $\frac{5}{0}$. Algunos alumnos hacen una interpretación incorrecta de la operación y su respuesta es 0 pues entienden que están dividiendo $\frac{0}{5}$; pero quienes consiguen entender correctamente la operación, explican que no pueden dar una solución ya que no existe un número que multiplicado por cero sea cinco, incluso, algún alumno propone como respuesta ∞ y explica la indefinición del resultado. Esta contestación deja ver que los alumnos entienden la expresión $\frac{5}{0}$, no sólo como una operación (proceso), sino como un número (concepto), lo que evidencia la existencia de la dualidad de que hablan Azcárate & Camacho (2003).

Finalmente, la observación en clases ha permitido percibir que al resolver un problema, los alumnos utilizan soluciones que podemos considerar "no convencionales", esto provoca que al socializar las respuestas en clase éstas sean muy diversas y en algunos casos utilicen herramientas más allá de las que proponen el docente.

Conclusiones

El análisis sobre el dominio los conocimientos escolares nos permite concluir que existe un fuerte deficiencia en este sentido; los alumnos apenas conocen unos pocos conceptos y procedimientos, respecto de lo que deberían saber según el grado escolar en el que se encuentran. En contraste, muestran un desempeño sobresaliente en dominio de habilidades básicas de pensamiento, siempre que las preguntas realizadas esten desligadas de un contenido escolar o que el tipo de pregunta les permita recurrir a la intuición. Además, algunos alumnos muestran características que nos indican el desarrollo de pensamiento matemático avanzado.

Podemos concluir que existe una disociación entre la adquisición de los conocimientos conceptuales y procedimentales que se proponen en la educación básica y el desarrollo de procesos de pensamiento matemático avanzado; es decir, la ausencia de algunos de los



elementos del primero no implican la inexistencia del segundo. Queda en el aire la pregunta ¿hasta qué punto se puede avanzar en el desarrollo del pensamiento matemático avanzado sin las herramientas que ofrece la educación básica?

Referencias

- Azcárate, C. & Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. En *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X(2), pp. 135 149.
- Belmonte, J.L. (2009). Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad (Tesis doctoral). Universidad de Salamanca. España.
- Bolea, M.P.; Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en procesos de alfabetización. El caso de la alfabetización. *Recherches en didactique des mathématiques*, 21(3), pp. 247 304.
- DOF. (1983). Plan Nacional de Desarrollo 1983 1988. Disponible en línea: http://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?%20codigo=4805999&fecha=31/05/1983
- Enríquez Gutiérrez, G. A., & Arredondo, A.. (2018). Los alumnos superdotados en la agenda política educativa de México (1980-2006). Foro de Educación, 16(24), 193-213. doi: http://dx.doi.org/10.14516/fde.515
- INEE. (2017). Panorama Educativo. Indicadores del Sistema Educativo Nacional 2016.
 Educación básica y Media superior. INE: México. Disponible en línea:
 http://publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P1/B/115/P1B115.pdf
- Sánchez, M. (2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades de pensamiento. Revista Electrónica de Investigación Educativa 4, (1). Disponible en: http://redie.ens.uabc.mx/vol4no1/contenido-amestoy.html
- Soto, D. & Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y Exclusión. Una visión socioepistemológica. Boletim de Educação Matemática [en linea], 28 (diciembre sin mes). Disponible en: http://www.redalyc.org/html/2912/291232906026/.

Debates en Evaluación y Currículum/Congreso Internacional de Educación: Evaluación 2018 /Año 4, No. 4/ Septiembre de 2018 a Agosto de 2019



- SEP. (2006). Propuesta de Intervención: Atención educativa a alumnos y alumnas con aptitudes sobresalientes. SEP: México. Documento disponible en línea: http://www.educacionespecial.sep.gob.mx/pdf/aptitudes/intervencion/Propuesta_inter.pdf
- SEP. (2018). Alumnos con aptitudes sobresalientes. Folleto informativo disponible en línea: http://www.educacionespecial.sep.gob.mx/2016/pdf/2016/info_Aptitudes%20sobresalientes.pdf