¿Cómo conciben al infinito los profesores de matemáticas en servicio de medio superior? Del infinito natural al actual

Irving Aarón Díaz Espinoza
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
zaidazonipse@hotmail.com
José Antonio Juárez López
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
jajul@fcfm.buap.mx
Estela de Lourdes Juárez Ruiz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
estela.juarez@correo.buap.mx

Área temática: Práctica curricular: Docentes y alumnos, los actores del currículo.

Resumen

La literatura pone en evidencia que los estudiantes presentan concepciones limitadas del infinito en diferentes contextos y que, además, es más resistente en contextos geométricos que aritméticos. Por otro lado, se ha mencionado que una de las posibles causas de dichas concepciones puede deberse a que los profesores también presentan concepciones limitadas del infinito y que las transmiten a sus estudiantes. Por ello, en este trabajo se muestran los resultados obtenidos de aplicar un pretest con profesores de matemáticas de nivel secundaria y medio superior que están en servicio público o privado del estado de Puebla, México. Este estudio tiene un doble propósito: evidenciar que los profesores también presentan concepciones limitadas del infinito como lo hacen los estudiantes; y segundo, que los resultados mostrados aquí permitan a futuro diseñar situaciones didácticas para superar dichas concepciones en los profesores.

Palabras clave: infinito, profesores de matemáticas, misconcepciones.

Introducción

En investigaciones entre estudiantes y profesores en formación se ha evidenciado la existencia de comprensiones incompletas en expresiones del tipo $0.999\ldots = 1$ (Díaz-Espinoza et al., 2023; Dubinsky et al., 2005b; Juter, 2019; Kattou et al., 2010; Schwarzenberger y Tall, 1978; Vinner y Kidron, 1985; Wistedt y Martinsson, 1996; Yopp et al., 2011). Recientemente, en Krátká et al. (2021) proponen cuatro concepciones del infinito: natural, potencial, posición omega-épsilon y actual. De manera similar, en Cihlář et al. (2015) proponen la posición omega-épsilon del infinito como una fase previa del infinito actual. Así, construir una concepción completa del infinito involucra recorrer cada una de las etapas desde el infinito natural hasta el infinito actual, lo cual no es sencillo de lograr ya que no es un recorrido lineal, sino más bien, un ir y venir entre las etapas.

Por ejemplo, en un estudio realizado con profesores en servicio se halló que cerca del 72% de los docentes tienen una imagen del infinito como proceso sin fin (infinito potencial) y sólo el 28% definen el infinito como un objeto (infinito actual) (Kattou et al., 2010, p. 1775). Es importante diseñar situaciones didácticas que permitan superar las etapas previas del infinito y concebirlo como un infinito actual ya que si los profesores comunican errores a sus estudiantes, estos puede convertirse en una fuente de dificultades para ellos con este concepto (Kattou et al., 2010; Schwarzenberger y Tall, 1978) y que a la vez, como sostienen Date-Huxtable et al. (2018) “está fuertemente influenciado por modelos tácitos y creencias conflictivas” (p. 546) entre profesores y estudiantes, lo que dificulta aún más su aprendizaje. Esto es evidenciado en la investigación de Cihlář et al. (2015) ya que sólo dos estudiantes (10% de todos los encuestados) tienen una concepción del infinito actual. Además, en una entrevista realizada a una profesora también se hace evidente la falta de una imagen clara del concepto de infinito como un proceso finalizado y una resistencia a aceptar la expresión $0.999\ldots = 1$ (Díaz-Espinoza et al., 2023). Por lo tanto, se plantea la pregunta de investigación: ¿Cómo conciben el infinito los profesores de matemáticas en servicio de medio superior? El objetivo de este trabajo es identificar las concepciones que tienen profesores de matemáticas en servicio acerca del infinito.

Revisión de literatura

La investigación de Krátká et al. (2021) sugieren cuatro concepciones del infinito que pueden presentar los estudiantes: infinito natural, infinito potencial, posición omega-épsilon e infinito actual.

Por otro lado, Cihlář et al. (2015) describen al infinito natural como una primera fase conectada con objetos reales, los conjuntos, puntos y rectas les parecen infinitos siempre que se extiendan dentro de sus horizontes. Así, un primer acercamiento al infinito se da cuando en números que son muy grandes, por ejemplo, la cantidad de granos de arena en la Tierra o números como $10^{10^{10^{10}}}$ que son finitamente grandes, son pensados como infinitos (Dubinsky et al., 2005a).

La transición del infinito natural al infinito potencial es descrito en Krátká (2013):

> La diferencia entre infinito natural e infinito potencial se manifiesta claramente, por ejemplo, en el problema de la existencia de la intersección de rectas divergentes cuyas imágenes en el papel no se cortan. Mientras que un estudiante con idea de infinito natural rechaza la existencia de una intersección, un estudiante con idea de infinito potencial alarga las imágenes de líneas rectas y confirma la existencia de una intersección. (p. 98)
>
> La posición omega[-épsilon] es una fase de desarrollo de transición entre el infinito potencial y el actual y que se crea predominantemente por medio de la intuición primaria, cuando el individuo se ve obligado a cambiar su acercamiento potencial al infinito al actual por aplicar un nuevo contexto. (Cihlář et al., 2015, p. 70)

Por último, según Krátká et al. (2021) en la concepción actual del infinito, todos los horizontes ya están destrozados, es decir, según estos autores "el concepto de infinito está inevitablemente ligado al concepto de horizonte como 'una línea' que separa la parte iluminada (visible) de un objeto observado (o conocido) de la parte no iluminada (o desconocida, respectivamente)" (Krátká et al., 2021, p. 4).

Método

Se realizó un estudio piloto con el propósito de contrastar los resultados obtenidos con estudiantes que han sido reportados en la literatura y con los de profesores en servicio de esta aplicación. La hipótesis que se esperó comprobar es que dicho instrumento es igual de aplicable con profesores y evidencia las mismas concepciones que los estudiantes. El instrumento para el estudio piloto consta de cinco ítems y es el mismo que el mostrado en Krátká et al. (2021, pp. 9–10) bajo ciertas modificaciones menores a modo de que el profesor pueda justificar sus respuestas de forma abierta. Este cuestionario es considerado ya que, según los autores, permite identificar las cuatro concepciones del infinito en cada reactivo en un contexto aritmético (ítems 1, 3 y 4) y geométrico (ítems 2 y 5), así como en una visión a distancia ('infinitamente grande' o 'infinitamente muchos') y una visión a profundidad ('infinitamente cerca') (Krátká et al., 2021, pp. 12–13). A los profesores se les proporcionó el instrumento impreso y un tiempo de 50 minutos para su finalización.

Participantes

Para la implementación se consideraron ocho profesores en servicio (cinco de nivel secundaria y tres de medio superior) y un profesor en formación de nivel secundaria, todos de diferentes instituciones educativas de la ciudad de Puebla, México y de sostenimiento público o privado. Solo uno de los profesores no contestó el ítem 4. Para su clasificación y análisis posterior se usaron las siglas P1-NMS, P2-NMS, P3-NMS, P4-NB, P5-NB, P6-NB, P7-NB, P8-NB y P9-EF, las cuales significan, respectivamente, Nivel Medio Superior (NMS), Nivel Básico (NB) y En Formación (EF).

Resultados

En la Tabla 1 se muestran las frecuencias absolutas de las concepciones del infinito en cada uno de los contextos y visión del instrumento que fue aplicado en los profesores y los resultados obtenidos por cada uno de ellos.

Ítems	**Contexto**	**Vista**	**Concepción**			
			Infinito natural	**Infinito potencial**	**Posición omega-épsilon**	**Infinito actual**
2 y 5	Geométrico	‘infinitamente grande’	5	3	1	0
		‘infinitamente cerca’	7	2	0	0
1, 3 y 4	Aritmético	‘infinitamente grande’	1	3	3	2
		‘infinitamente cerca’	0	5	1	2

Tabla 1. *Resultados piloto de la concepción del infinito presente en profesores en servicio.*

Para el ítem 1 que constituye un contexto aritmético en una visión ‘infinitamente grande’, la mayoría (seis profesores) tiene una concepción entre infinito potencial y posición omega-épsilon. El ítem 3 está en paralelo con la misma visión, pero existen contradicciones en las respuestas de los profesores en esos dos ítems. Por ejemplo, un profesor cuando es cuestionado al mayor número que satisface $x - 1 > 2$ menciona que sería infinito como representación de número grande (véase Figura 1), pero en el ítem 3 al preguntar por el mayor número real, indica que no existe (véase Figura 2).

Con el ∞ podemos hacer referencia a cualquier numero mayor que 3

Figura 1. *Respuesta del P6-NB al ítem 1c).*

No existe. Siempre hay la posibilidad de escribir un número mayor al anterior. Ahí cobra sentido el ∞

Figura 2. *Respuesta del P6-NB al ítem 3).*

Esto indica que en la desigualdad anterior el profesor intenta dar un número como solución y al ser siempre creciente, evidencia una concepción del infinito potencial, sin embargo, más adelante refiere que dicho número no existe, por lo tanto, hay un intento de superación hacia el infinito actual.

El intervalo que satisface la desigualdad es [3, ∞). Pero considerando que el conjunto de los números reales es infinito, entonces no es posible determinar el número más grande que satisface la inecuación. El ∞ no representa un número

Figura 3. *Respuesta del P9-EF al ítem 1c).*

El Conjunto de los números reales (ℝ) es un conjunto infinito por tanto no se podría definir cuál es el número R más grande.

Figura 4. *Respuesta del P9-EF al ítem 3).*

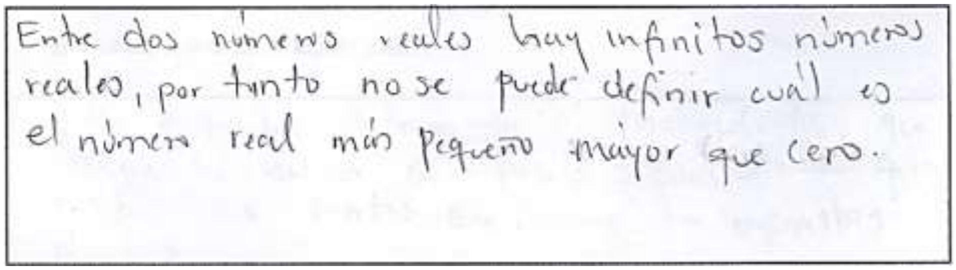

Entre dos números reales hay infinitos números reales, por tanto no se puede definir cuál es el número real más pequeño mayor que cero.

Figura 5. *Respuesta del P9-EF al ítem 4).*

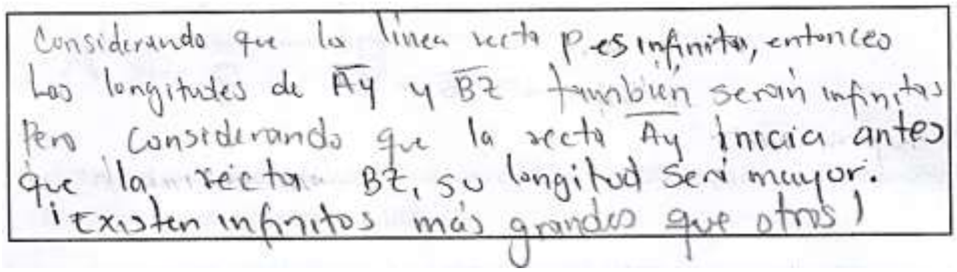

Considerando que la línea recta P es infinita, entonces Los longitudes de $\overline{Ay}$ y $\overline{Bz}$ tambien serán infinitas Pero Considerando que la recta $\overline{Ay}$ Inicia antes que la recta Bz, su longitud será mayor. ¡Existen infinitos más grandes que otros!

Figura 6. *Respuesta del P9-EF al ítem 2e).*

Otro profesor evidenció una concepción del infinito actual en los ítems 1, 3 y 4 (véase Figura 3, Figura 4 y Figura 5) que son los correspondientes a un contexto aritmético, pero en los ítems 2 y 5 en un contexto geométrico presentó concepciones de infinito potencial (véase Figura 6 y Figura 7). Para el ítem 2, esto posiblemente a las limitaciones de ofrecen las ilustraciones para entender las diferencias entre segmento de recta y línea recta, o bien, otras de ellas como mencionan Krátká et al. (2021):

> En un contexto geométrico, tales malentendidos pueden ocurrir, por ejemplo, cuando el maestro dice que un segmento tiene infinitos puntos. Esto significa, entre otras cosas, que el número de puntos del segmento no depende de su longitud. Sin embargo, para un estudiante que hace uso de la concepción del infinito natural, dos segmentos de dos longitudes diferentes tienen un número diferente de puntos, aunque en ambos casos son infinitos. (p. 16)

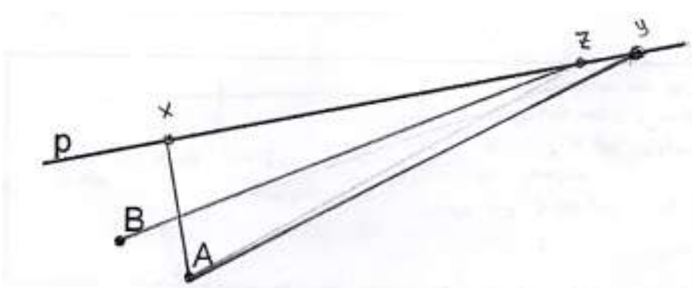
Por otro lado, para el ítem 5 que presenta una situación de áreas infinitamente pequeñas, dicho profesor presenta contradicciones en dos apartados: 5d) al decir que no puede saberse el área porque es infinitamente pequeña, pero en 5f) compara dicha área con otra e incluso determina que es mayor (véase Figura 7). Por ello, podría suponerse que el profesor presenta una concepción del infinito natural en un intento de superación al infinito potencial.

No es posible determinar el triangulo ABY que tenga la menor área posible. Considerando que entre los puntos B y C existen infinitos puntos.

El área del Δ ABY es mayor que el área del Δ SBY puesto que la longitud de su base es el doble que la del triangulo SBY

Figura 7. *Respuestas del P9-EF a los ítems 5d) y 5f), respectivamente.*

Así, solo un profesor evidenció una concepción de posición omega-épsilon en un contexto geométrico particularmente en el ítem 2, ya que en su imagen realizada coloca los puntos al final de la línea recta, aquí su concepción sería de infinito potencial. Luego puede decirse que su concepción está aún al límite de su horizonte, pero superando al infinito potencial ya que considera a los puntos en el infinito al argumentar su respuesta en el siguiente apartado (véase Figura 8). Incluso argumenta que no puede compararse las líneas rectas por ser infinitas. Cabe mencionar que dicho profesor comentó que después de entregar la prueba sabía que había identificado una contradicción en ese ítem porque su dibujo no reflejaba lo que escribió. Por ello, se consideró en una posición omega-épsilon en camino a un infinito actual.



$\overline{Ay} = \sqrt{(x_1-\infty)^2+(y_1-\infty)^2}$ Donde (x_1, y_1) son las coordenadas de A y (∞, ∞) son las coordenadas de Y

$\overline{BZ} = \sqrt{(x_2-\infty)^2+(y_2-\infty)^2}$ Donde (x_2, y_2) son las coordenadas de B $z(\infty, \infty)$ son las coordenadas de Z.

Dado que los ∞ pueden ser diferentes, es decir, pueden existir infinitos más grandes que otros. no podemos concluir si son mayor, menor o iguales

Figura 8. Respuestas del P3-NMS a los ítems 2) y 2e), respectivamente.

Contrariamente, otro profesor dibujó los puntos en el infinito sin colocar los puntos al extremo de la figura dada (véase Figura 9), pero al argumentar su respuesta, aunque sabe que es infinita en extensión la línea recta, aun compara el tamaño de las rectas resultantes como si fuesen infinitos de diferente tamaño, en un intento de analogía a la cardinalidad de conjuntos infinitos (véase Figura 6). Por ello, se considera que presentó una concepción de infinito potencial.

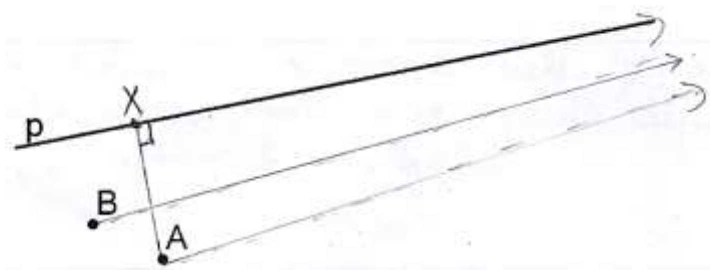


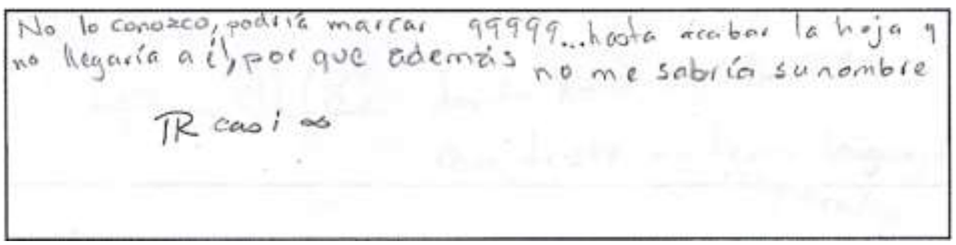
Figura 9. *Respuesta del P9-EF al ítem 2).*

Discusión

En general, en el contexto geométrico los profesores dibujaron los puntos en los extremos de la figura y muestran limitantes en el concepto de línea recta. Aunque algunos de ellos indican que los puntos están en el infinito los dibujan en los extremos, lo cual implica un obstáculo en su imagen mental de línea recta. Por otro lado, en el contexto aritmético los profesores incluyeron al infinito como representación de un número que nunca termina (infinito potencial) aceptando que no pueden escribir un número más grande en situaciones del tipo ‘infinitamente grande’, pero cuando se trata de una vista ‘infinitamente cerca’ existen limitantes en aceptar que no existe un último número más cercano al cero. Esto está en concordancia con lo reportado en investigaciones con estudiantes y profesores (Date-Huxtable et al., 2018; Eisenmann, 2008; Juter, 2019; Kattou et al., 2010; Krátká et al., 2021; Manfreda Kolar y Čadež, 2012; Wistedt y Martinsson, 1996; Yopp et al., 2011).

Los resultados de este estudio piloto presentan similitudes a otras investigaciones, por ejemplo, en Kattou et al. (2010) más del 70% de los profesores entrevistados tienen una concepción del infinito potencial y un poco menos del 30% una concepción del infinito actual. En este piloto los profesores mostraron una tendencia a la concepción natural y potencial tanto en contextos geométricos como aritméticos. Contrario a que existe una mayor concepción de posición omega-épsilon e infinito actual en situaciones aritméticas que geométricas. De hecho, en situaciones geométricas no hubo profesores que presentaran concepciones del infinito actual. Algo que según Krátká et al. (2021) debería de desaparecer con la edad de los estudiantes, e inversamente debería propiciar la aparición del infinito actual conforme avanzan en su formación.

En la investigación con estudiantes de Manfreda Kolar y Čadež (2012) se reportó que los estudiantes tienen mejores resultados con tareas del tipo ‘infinitamente grande’ que con ‘infinitamente cerca’. En este piloto, en general, sin importar si son contextos geométricos o aritméticos los ítems de ‘infinitamente grande’ o ‘infinitamente cerca’ son aproximadamente similares en los profesores encuestados. Sin embargo, en Krátká (2013) se menciona que en ocasiones las cantidades finitas superan los horizontes del estudiante y por ende es considerado como infinito. Esto fue el caso de un profesor al preguntar sobre el número real más grande, mencionando que le es imposible escribirlo, ya que ni siquiera podría darle un nombre (véase Figura 10). Así, para este caso el profesor presenta una concepción del infinito natural.

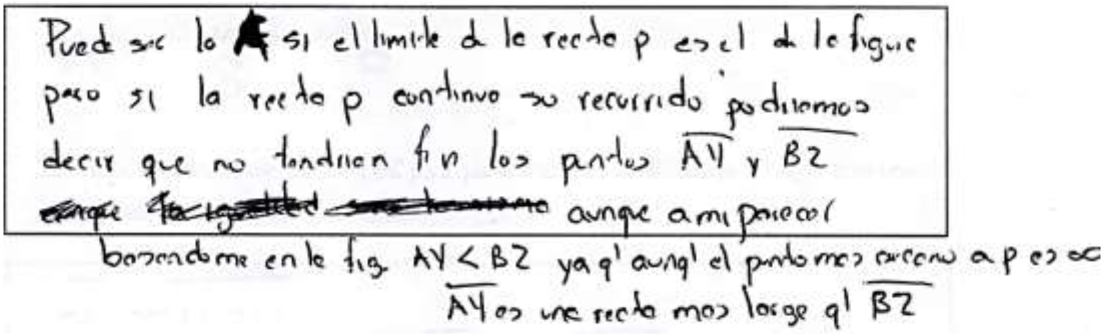

No lo conozco, podría marcar 99999...hasta acabar la hoja y no llegaría a él, por que además no me sabría su nombre

$\mathbb{R}$ casi ∞

Figura 10. *Respuesta del P4-NB al ítem 3).*

Por otro lado como ya se mencionó antes, en Krátká et al. (2021) se afirma que la concepción del infinito natural desaparece con la edad de los estudiantes, sin embargo, en el piloto se observó una tendencia mayor a dicha concepción en contextos geométricos más que aritméticos.

Algunos profesores externaron que si se extendiese la línea recta más allá de la figura expuesta no existe un punto final, pero si se quedan con la figura que se les muestra tendría un punto final en los extremos. Aquí se puede intuir una confusión entre segmento de recta y línea recta, o bien, un obstáculo epistemológico de la imagen mental que tienen de una línea recta (véase Figura 6 y Figura 11).



Pued ser lo si el limite d la recta p es el d la figura
paro si la recta p continua su recorrido podriamos
decir que no tendrian fin los puntos $\overline{AY}$ y $\overline{BZ}$
aunque a mi parecer
basandome en la fig. AY < BZ ya q' aunq' el punto mas cercano a p es ∞
$\overline{AY}$ es una recta mas larga q' $\overline{BZ}$

Figura 11. *Respuesta del P2-NMS al ítem 2e).*

Conclusiones

Las evidencias del estudio piloto llevan a comprobar que dicho instrumento presentado en Krátká et al. (2021) que fue aplicado en estudiantes también muestra resultados similares para profesores de educación secundaria y media superior en servicio y en formación.

También, se tuvo en contextos aritméticos una mayor presencia de concepciones del infinito actual y posición omega-épsilon en comparación con contextos geométricos. Así, un trabajo a futuro para el diseño de las situaciones didácticas debe contemplar situaciones geométricas que permitan una superación de la concepción natural o potencial del infinito y que el profesor construya una concepción actual en mayor medida.

Referencias

Cihlář, J., Eisenmann, P., & Krátká, M. (2015). Omega Position – a specific phase of perceiving the notion of infinity. *Scientia in Educatione*, *6*(2), 51–73. https://doi.org/10.14712/18047106.184

Date-Huxtable, E., Cavanagh, M., Coady, C., & Easey, M. (2018). Conceptualisations of infinity by primary pre-service teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *30*(4), 545–567. https://doi.org/10.1007/s13394-018-0243-9

Díaz-Espinoza, I. A., Juárez-López, J. A., & Juárez-Ruiz, E. (2023). Exploring a Mathematics Teacher's Conceptions of Infinity : The Case of Louise. *Indonesian Journal of Mathematics Education*, *6*(1), 1–6. https://journal.untidar.ac.id/index.php/ijome/article/view/560

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 335–359. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(2), 253–266. https://doi.org/10.1007/s10649-005-0473-0

Eisenmann, P. (2008). Why is it not true that 0.999 … < 1? *Teaching of Mathematics*, *11*(1), 35–40.

Juter, K. (2019). University students' general and specific beliefs about infinity, division by zero and denseness of the number line. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *24*(2), 69–88.

Kattou, M., Thanasia, M., Katerina, K., Constantinos, C., & George, P. (2010). Teachers' Perceptions About Infinity : a Process or an Object ? In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1771–1780). www.inrp.fr/editions/cerme6

Krátká, M. (2013). Zdroje epistemologických překážek v porozumění nekonečnu. *Scientia in Educatione*, *1*(1), 87–100. https://doi.org/10.14712/18047106.7

Krátká, M., Eisenmann, P., & Cihlář, J. (2021). Four conceptions of infinity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–25. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1897894

Manfreda Kolar, V., & Čadež, T. H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(3), 389–412. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9357-7

Schwarzenberger, R. L. E., & Tall, D. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, *82*, 44–49.

Vinner, S., & Kidron, I. (1985). The concept of repeating and non-repeating decimals at the senior high level. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 357–361). https://eric.ed.gov/?id=ED411130

Wistedt, I., & Martinsson, M. (1996). Orchestrating a mathematical theme: Eleven-year olds discuss the problem of infinity. *Learning and Instruction*, *6*(2), 173–185. https://doi.org/10.1016/0959-4752(96)00001-1

Yopp, D. A., Burroughs, E. A., & Lindaman, B. J. (2011). Why it is important for in-service elementary mathematics teachers to understand the equality .999...=1. *Journal of Mathematical Behavior*, *30*(4), 304–318. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.07.007