CONGRESO INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN | EVALUACIÓN 2024

Revisión de los comportamientos efectuados al razonar covariaiconalmente: Un análisis sistemático-clasificatorio

[en] Review of the behaviors carried out when reasoning covariaiconally: A systematic-classification analysis

Karla Bojórquez
Correo electrónico: kbojorquez@uach.mx
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3086-9351

Fidel González-Quiñones
Correo electrónico: fgonzalez@uach.mx
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8404-0098
Universidad Autónoma de Chihuahua

Javier Tarango

Correo electrónico: tj.88888@hotmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0416-3400

Universidad Autónoma de Chihuahua

Resumen. El estudio del razonamiento covariacional es relevante en el entendimiento del pensamiento matemático necesario para la comprensión de materias de matemáticas avanzadas o la aplicación de conceptos matemáticos en otras áreas. En este estudio se realizó una investigación documental, de cuyo análisis se identificó una clasificación de los principales problemas de eventos dinámicos empleados para el análisis del razonamiento covariacional. Aunado a esto, se propone un marco de clasificación para el razonamiento covariacional, el cual está basado en diferentes propuestas previamente desarrollada por otros autores. En este marco, se identifican los patrones y comportamientos propios de los estudiantes, clasificados en cada nivel de razonamiento covariacional en el contexto de cada problema de eventos dinámicos utilizado para analizarlo. La propuesta concluye que la aplicación del razonamiento covariacional no se restringe a las matemáticas solamente, sino a diversos problemas de eventos dinámicos que contribuyen a la solución de situaciones en todas las ciencias.

Palabras clave: Razonamiento covariacional, eventos dinámicos, cálculo, proceso de razonamiento, educación matemática, educación científica, pensamiento matemático, dificultades académicas en estudiantes.

Abstract. The study of covariational reasoning is relevant in understanding the mathematical thinking necessary for understanding advanced mathematics subjects or the application of mathematical concepts in other areas. In this study, a documentary investigation was carried out, from whose analysis a classification of the main problems of dynamic events used for the analysis of covariational reasoning was identified. In addition to this, a classification framework for covariational reasoning is proposed, which is based on different proposals previously developed by other authors. In this framework, students' own patterns and behaviors are identified, classified at each level of covariational reasoning in the context of each dynamic event problem used to analyze it. The proposal concludes that the application of covariational reasoning is not restricted to mathematics alone, but to various problems of dynamic events that contribute to the solution of situations in all sciences.

Keywords: Covariational reasoning, dynamic events, calculation, reasoning process, mathematics education, science education, mathematical thinking, academic difficulties in students.

Introducción

En el área de educación de la ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas es fundamental el desarrollo de un razonamiento avanzado para la comprensión y aplicación de los conceptos en materias como cálculo, física y análisis. Por tanto, el razonamiento deriva del desarrollo del pensamiento matemático, siendo esencial para los estudiantes y su aprendizaje (Purbaningrum et al., 2020). Específicamente en matemáticas, el razonamiento se vuelve necesario para determinar si un argumento matemático es verdadero o falso, así como para poder obtener conclusiones lógicas del mismo (Hamzah et al., 2022).

Dentro de los principales conceptos necesarios en el aprendizaje de matemáticas de nivel superior está el concepto de función, propiamente, la manera en que una variable se relaciona con otra (Alajmi y Al-Kandari, 2020). La comprensión de los estudiantes de la razón de cambio de una variable con otra puede derivar en dificultades para la comprensión de otros conceptos tales como la derivada o la interpretación del cambio en situaciones dinámicas (Avgerinos y Remoundou, 2021).

El razonamiento covariacional es fundamental para el desarrollo de un pensamiento funcional, razonar acerca de la relación covariacional entre cantidades o variables puede derivar en una relación funcional (Kafetzopoulos y Psycharis, 2022). La habilidad de razonar covariacionalmente permite una mejor comprensión del concepto de función, logrando una definición que no se limite a una definición teórica, sino que se comprenda el fundamentalmente la relación entre variables (Hamzah et al., 2022).

La estrecha relación que existe entre el razonamiento covariacional y el concepto de función hace que el razonamiento covariacional se vuelva esencial para la comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo (Carlson et al. 2002). Existen distintas investigaciones que estudian la relación del razonamiento covariacional con diferentes conceptos, por ejemplo, Mateus-Nieves y Moreno (2021) estudian el concepto de función desde la interpretación de sus características dinámicas, en tanto que Antonini y Lisarelli (2021) lo hacen desde la perspectiva el concepto como una covariación dinámica entre los cambios de dos variables, en tanto Ramos (2021) se enfoca en el estudio de funciones lineales y cuadráticas se ha utilizado la coordinación simultanea de cambio entre dos variables.

El estudio del razonamiento covariacional cobra importancia por su relación con el desarrollo de conceptos matemáticos avanzados, sobre todo en las áreas de ciencia, tecnología e ingeniería. A pesar de su importancia y de la relación que existe con el desarrollo de otros tipos de pensamiento, la teoría que define y sustenta el razonamiento covariacional no ha evolucionado mucho desde lo propuesto por Thompson y Carlson (2017). Por tanto, el propósito del presente articulo es proporcionar una guía para la clasificación del razonamiento covariacional en los distintos niveles propuestos por la literatura. Para ello se realizó una revisión de distintas fuentes donde se pidiera a los estudiantes resolver uno o varios problemas que involucren alguna situación dinámica y a partir de la interpretación de sus respuestas, se les clasifica en algún nivel de razonamiento covariacional.

Este artículo pretende ofrecer ejemplos concretos de comportamientos y respuestas que se deben buscar al analizar las respuestas de una situación dinámica para poder determinar en que nivel de razonamiento covariacional se encuentra cada estudiante. Carlson et al. (2022) crearon una guía de este estilo, pero limitada al problema del llenado de botellas y la clasificación por niveles corresponde al primer marco teórico de razonamiento covariacional propuesto.

Marcos teóricos e instrumentos del razonamiento covariacional

El razonamiento Covariacional se define como "una actividad cognitiva que coordina el cambio de dos cantidades diferentes que tienen una relación poniendo atención al proceso del cambio" (Hamzah et al., 2022, p. 3). El enfoque estudiado por estos autores pretende describir las acciones mentales realizadas al razonar covariacionalmente al interpretar eventos de funciones dinámicas. La imagen de covariación que una persona realiza está sustentada en las acciones mentales que esta persona realiza. Carlson et al. (2002) proponen un marco conceptual con cinco niveles, en cada uno de ellos se describen las acciones mentales y comportamientos asociados a cada nivel de razonamiento covariacional (Tabla 1).

Tabla 1. *Acciones mentales del marco teórico de covariación*

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
Acción mental 1 (AM1)	Coordinación del valor de una variable con cambios en la otra.	Etiquetar los ejes con indicaciones verbales de la coordinación de las dos variables (ej. *y* cambia con cambios en *x*).
Acción mental 2 (AM2)	Coordinación de la dirección de cambio de una variable con cambios en la otra.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la conciencia de la dirección de cambio de la variable de salida considerando los cambios en la de entrada.
Acción mental 3 (AM3)	Coordinación de la cantidad de cambio en una variable con los cambios en la otra variable.	Grafica de puntos/construcción de líneas secantes. Verbalización de la conciencia de la cantidad de cambio de la variable de salida considerando los cambios en la de entrada.
Acción mental 4 (AM4)	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con incrementos de cambio uniformes en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la conciencia de la razón de cambio de la salida (con respecto a la entrada) mientras se consideran incrementos uniformes en la entrada.
Acción mental 5 (AM5)	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos de la variable independiente por todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicadores claros de los cambios de concavidad. Verbalización de la conciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio por todo el dominio de la función (dirección de concavidades y puntos de inflexión son correctos).

Fuente: Adaptado de Carlson et al., 2002

En dicho marco, se ejemplifican los comportamientos que se presentan al realizar una acción mental determinada. Según Martínez-Miraval et al. (2023), "estas acciones mentales son el núcleo que permite reconocer qué tan sofisticado es el razonamiento covariacional de los estudiantes" (p. 57). El razonamiento covariacional se clasifica por niveles, los cuales son alcanzados al desarrollar en conjuntos las acciones mentales correspondientes a cada niel. Es decir, para que un tiene un razonamiento covariacional correspondiente al nivel 3, deberá efectuar las acciones mentales A1, A2 y A3 (Tabla 2).

Tabla 2. *Niveles de razonamiento covariacional*

Nivel	**Descripción**
Nivel 1 (N1): Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de covariación pueden soportar la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1)
Nivel 2 (N2): Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de covariación pueden soportar las acciones mentales de coordinación y dirección de cambio de una variable con cambios en la otra variable. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 están sustentadas por imágenes del N2.
Nivel 3 (N3): Coordinación cuantitativa	En el nivel de coordinación cuantitativa, las imágenes de covariación pueden sustentar las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra variable. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 aparecen en las imágenes del N3.
Nivel 4 (N4): Razón promedio	En el nivel de razón promedio, las imágenes de covariación pueden soportar las acciones mentales de coordinación de la razón de cambio promedio de la función con cambios uniformes en la variable de entrada. LA razón de cambio promedio puede ser descompuesta para coordinar la cantidad de cambio de la variable de salida con cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas de AM1 a la AM4 se soportan por las imágenes del N4.
Nivel 5 (N5): Razón instantánea	En el nivel de razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar las acciones mentales de coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una conciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos cada vez más pequeños de la razón de cambio promedio. También incluye una conciencia de que el punto de inflexión es donde la razón de cambio cambia de creciente a decreciente o viceversa. Las acciones mentales identificadas de la AM1 a la AM5 están sustentadas por las imágenes de N5.

Fuente: Adaptado de Carlson et al., 2002

La manera en que se visualizan las razones de cambio entre dos cantidades o variables puede ser de forma continua o discreta. Los autores expresan que la razón de cambio percibida de forma discreta se puede considerar como una razón “a trozos”, es decir, en segmentos o intervalos. El razonamiento continuo implica una percepción del cambio entre variables de forma “suave” sin interrupciones o saltos (Castillo-Garsow et al., 2013).

Aunado al marco previamente presentado por Carlson et al. (2002) se suman estos conceptos de covariación “a trozos” y covariación “suave”. Con ello, Thompson y Carlson (2017) redefinen los niveles de clasificación de razonamiento covariacional (Tabla 3). Se incorpora un nuevo nivel, llamado sin coordinación, en donde no se identifica ningún tipo de relación entre dos variables. Además, se reclasifican los niveles de razonamiento para incorporar un nivel de covariación a trozos y un nivel de covariación suave.

Tabla 3. *Principales niveles de razonamiento covariacional*

Nivel	Descripción
Sin coordinación	La persona no tiene imagen de que las variables varíen juntas. La persona se enfoca en el cambio de una u otra variable sin coordinación de valores.
Precoordinación de valores	La persona visualiza el cambio de los valores de las dos variables, pero asincrónicamente-una variable cambia, luego la segunda variable, luego la primera y así sucesivamente. La persona no anticipa crear pares de valores como objetos multiplicativos.
Coordinación gruesa de valores	La persona forma una imagen gruesa de los valores de las cantidades cambiando juntos, tal como “esta cantidad crece mientras esta cantidad decrece”. La persona no visualiza que los valores individuales de las cantidades van juntas. En su lugar,

Nivel	Descripción
	la persona visualiza un vínculo suelto y no multiplicativo entre los cambios generales en los valores de las dos cantidades.
Coordinación de valores	La persona coordina los valores de una variable (x) con los valores de otra variable (y) con la anticipación de crear una colección discreta de pares (x,y).
Covariación continua a trozos	La persona visualiza los cambios del valor de una variable conforma pasa simultáneamente con los cambios en el valor de la otra variable, y visualizan ambas variables cambiando con una variación continua a trozos.
Covariación continua suave	La persona visualiza incrementos o decrementos (de aquí en delante, cambios) en una cantidad o valor de una variable conforme sucede simultáneamente con los cambios en el valor de la otra variable, y la persona visualiza ambas variables cambiando suave y continuamente.

Fuente: Adaptado de Thompson y Carlson (2017)

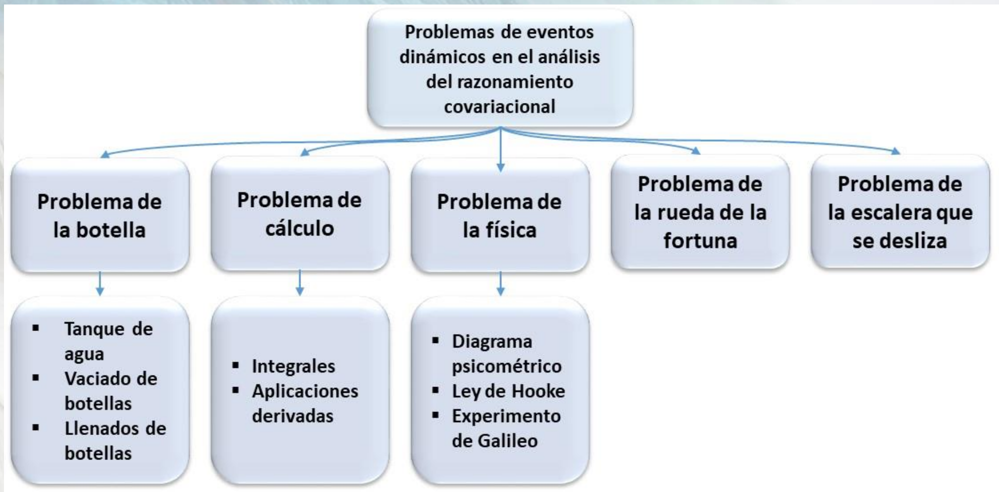
Es importante notar que cuando un nivel describe la capacidad de razonar de manera covariacional significa que se considera que se puede razonar en todos los ámbitos que implica dicho nivel (Nava-Guzmán, 2021). Esto representa que cuando un estudiante razona de manera variable entre niveles, en realizar razona en el nivel superior, así como, que ha desarrollado, además niveles inferiores, observándose así un proceso de evolución en su razonamiento covariacional (Martínez-Miraval et al., 2023).

Patrones en el análisis del razonamiento covariacional

Dentro del estudio del razonamiento covariacional se tienen distintos métodos de análisis, aplicando diferentes instrumentos y utilizando varias técnicas buscando clasificar el razonamiento covariacional de los sujetos de estudio. Existen ciertos patrones metodológicos entre las investigaciones, coincidiendo en instrumentos utilizados y técnicas de análisis y clasificación.

Los problemas utilizados para analizar el razonamiento covariacional son eventos dinámicos en donde se busca analizar los aspectos covariantes de los mismos, es decir, donde se busca analizar la manera en que dos cantidades variables cambian entre sí. La literatura revisada concuerda en cinco tipos principales de problemas (Figura 1). El empleo de cada problema para analizar el razonamiento covariacional depende del criterio del investigador y del contexto de cada investigación, sin embargo, el más utilizado es el problema de las botellas y sus variantes, seguido del problema de la escalera que se desliza y la rueda de la fortuna.

Figura 1. Problemas de eventos dinámicos para el análisis del razonamiento covariacional



Fuente: Creación propia

Algunas de las investigaciones revisadas buscan contextualizar el razonamiento covariacional en situaciones particulares de física o cálculo y para ellos se emplean problemas propios de cada área. En física se plantean problemas de masa-resorte que corresponden a la Ley de Hooke, el experimento de Galileo o la interpretación de un diagrama psicrométrico. En cálculo se analiza el razonamiento covariacional al interpretar problemas de integrales o aplicar el concepto de derivada en problemas de optimización.

Uno de los problemas más utilizados para estudiar el razonamiento covariacional a partir de la interpretación de una situación dinámica es el problema del llenado de botellas. Este ejercicio propuesto por Swan (1985) fue primeramente utilizado por Carlson et al. (2002). El planteamiento del problema consiste en una botella que se llena a razón constante y se busca representar gráficamente la relación entre el volumen del líquido que se vierte en la botella y la altura del líquido conforme la botella se va llenando.

En el estudio del razonamiento covariacional se han utilizado distintas versiones de este problema, algunas de ellas son las siguientes:

a) Un problema con botellas de diferentes formas e igual capacidad y diferentes gráficas que muestran una relación entre volumen y altura del líquido, se pide a los participantes que relacionen cada botella con su gráfica y justifiquen su elección (Bojórquez et al., 2021).
b) El problema de la botella mediante una simulación computarizada. Se muestra un video de una llave llenando botellas con diferentes formas y se pide se dibuje una gráfica que muestre la relación volumen-altura del agua en la botella conforme esta se llena (Johnson et al., 2017).
c) El uso de la simulación para presentar una variación del problema de la botella, en su trabajo ellos analizan la covariación en términos de la interpretación del gasto hidráulico en el llenado de cilindros en posición vertical u horizontal (Castañeda-Ovalle y García-Rodríguez, 2023).

d) El empleo de una variación del problema de la botella presentando cuatro tanques de agua con diferente forma y misma capacidad y se pidió a los participantes dibujar gráficas que representaran la relación de las variables volumen y altura (Kertil et al., 2019; Kertil, 2020).
e) Una aproximación diferente a esta situación es el problema invertido de la botella (Tyburski et al., 2021; Paoletti y Moore, 2017), aquí se tiene una botella llena con agua la cual se va evaporando; se pide interpretar y describir como es que la altura del agua en la botella cambia al disminuir el volumen.
f) Una variación del problema en donde no solo se pide construir una gráfica para una botella determinada, sino que se pide dibujar una botella para una gráfica dada donde se representa la variación de la altura con respecto al volumen del agua mientras se llena la botella (Paoletti y Moore, 2017). El problema de la botella y sus variaciones se ha utilizado para medir el razonamiento covariacional en situaciones atemporales, es decir, donde el tiempo no es una de las variables involucradas en la covariación.

El problema de la escalera que se desliza adaptado de Monk (1992) fue utilizado por Carlson et al. (2002), en este problema se introduce una variable temporal: la velocidad. El ejercicio consiste en describir la velocidad de la parte superior de una escalera conforme esta se desliza sobre una pared partiendo de una posición vertical. Esta misma situación dinámica se ha utilizado para medir el razonamiento covariacional pidiendo que se describa como dos cantidades con las mismas unidades de medida (altura y distancia) varían juntas (Kertil et al., 2019; Kertil, 2020).

Otros planteamientos diferentes retoman la rueda de la fortuna propuesta por Castillo-Garsow et al. (2013), entre los autores que destacan están Johnson et al. (2017), siendo que en este problema se tiene un carro en la cima de una rueda de la fortuna, se pide graficar la altura del carro desde el piso con respecto a la distancia total recorrida por el carro al girar la rueda, quienes proponen los conceptos de covariación suave y a trozos a partir del análisis de los resultados de este problema. Las principales propuestas sobre la rueda de la fortuna son:

a) El problema de la rueda de la fortuna de una manera kinestésica al proporcionar la redacción del problema y un diagrama del mismo junto con un pedazo de estambre que facilite la medición de distancias lineales y curvas, para luego pedir que se dibuje la gráfica representando las dos variables además de contestar un conjunto de preguntas relacionadas con la actividad (Nava-Guzmán et al., 2023).
b) Con la incorporación de las simulaciones computarizadas, el uso de este problema en el estudio del razonamiento covariacional ha permitido una presentación más detallada (Olsho, et al., 2022) e interactiva (Johnson, et al., 2017), lo cual permite una mejor visualización de las variables involucradas: altura del carro y distancia recorrida; así como una mejor visualización de los componentes del problema: radio de la rueda y posición del carro en la rueda, principalmente.

Otros estudios han buscado determinar el razonamiento covariacional al presentar problemas de física aplicada, tales como:

a) Buscar la caracterización como el empleo del razonamiento covariacional para modelar una situación dinámica real. En este caso, el de la construcción e interpretación de un diagrama psicrométrico donde se representa la relación entre la temperatura, humedad absoluta y humedad relativa (Bagossi, 2023).

b) Utilización de la realidad aumentada para presentar dos experimentos de física clásica, el experimento de la ley de Hooke examina la relación entre la masa y la elongación de un resorte; el experimento de Galileo examina la relación entre el tiempo y la distancia que un cubo recorre al deslizarse sobre un plano inclinado. Estas investigaciones resaltan la importancia del estudio del razonamiento covariacional en otras disciplinas aparte de la matemática (Jaber y Swidam, 2022).

Además de los fenómenos dinámicos, el proceso de pensar covariacionalmente afecta la comprensión de conceptos de cálculo tales como el de función, el estudio de límites y la derivada (Thompson y Carlson, 2017). Por ello se han realizado investigaciones en donde se busca analizar el razonamiento covariacional a partir de situaciones o problemas directamente relacionadas con el cálculo. El cambio de las acciones mentales relacionadas al razonamiento covariacional mientras se construye el concepto de integral definida a partir de las sumas de Riemann, para ello se apoyaron en el recurso digital GeoGebra. También se ha podido estudiar descriptores del razonamiento covariacional en problemas aplicados que involucran el uso de integral definida (Martínez-Miraval y García-Rodríguez, 2022).

En problemas que involucran interpretar la integral definida como un proceso de acumulación o aproximación se pueden identificar los distintos niveles de covariación al interpretar la forma en que las variables cambian entre sí. Uno de los conceptos más importantes en la comprensión del cálculo es el concepto de límite, la comprensión del concepto de limite estudiando la manera en que se comprende la covariación entre la variable dependiente x y la variable independiente $f(x) = y$ (Nagle et al., 2016).

Dentro de los problemas de aplicación del cálculo también se ha estudiado la presencia de las acciones mentales asociadas con el razonamiento covariacional. Las acciones mentales del razonamiento covariacional se hacen presentes en la solución de un problema de optimización que busca minimizar la longitud de la cerca de un terreno rectangular (Martínez-Miraval et al., 2023). Para ello la investigación se apoya en el recurso GeoGebra con la finalidad de facilitar la construcción de las representaciones gráficas. De forma similar, es presentar un problema típico de optimización, en donde se tiene una hoja rectangular de papel y se busca construir una caja abierta recortando cuadrados en las cuatro esquinas de la hoja y doblando los lados de la caja (Nava-Guzmán et al., 2023). Con el fin de presentar una actividad interactiva, se proporciona una hoja de papel en la que se pueden hacer cortes e identificar visualmente la variación en el volumen de la caja dependiendo del tamaño de los cortes que se hagan. Luego se pidió contestar preguntas relacionadas a la actividad y llenar una tabla de valores en donde se pudiera establecer la relación entre el tamaño de los cortes y el volumen de la caja.

Marco de clasificación de razonamiento covariacional

Dentro del estudio del razonamiento covariacional existen distintas metodologías de análisis, pero en todas ellas es necesario hacer una interpretación de la manera en que los sujetos responden a los problemas de situaciones dinámicas. Las respuestas dadas son analizadas de acuerdo con marco conceptual propuesto por Thompson y Carlson (2017), presente en la Tabla 3 previamente presentada. Para llevar a cabo el análisis es necesario identificar cierto tipo de respuestas, la evidencia del nivel de razonamiento en que el alumno esta pensando; las respuestas se deben clasificar identificando comportamientos o frases específicas que demuestren que el sujeto razona covariacionalmente. Al mostrar la revisión de los niveles de razonamiento

Covariacional, se proponen ciertos ejemplos de comportamientos que se pueden clasificar en cada nivel de razonamiento covariacional los cuales se presentan en la Tabla 4.

Tabla 4. *Tipos de respuestas para cada nivel de razonamiento covariacional, problema de la botella*

Nivel	Comportamientos y respuestas
Sin coordinación	No asocia la altura del agua con el volumen del líquido añadido. Respuestas como: “Sube la altura del agua” “Más agua se va añadiendo”
Precoordinación de valores	Se da cuenta que, al añadir cierto volumen de agua a la botella, la altura aumenta.
Coordinación gruesa de valores	Respuestas como: “la altura del agua aumenta conforme el volumen aumenta”
Coordinación de valores	Se enfoca en la altura del agua y en la cantidad de volumen añadido, sin considerar los valores intermedios de altura y volumen.
Covariación continua a trozos	Imagina el nivel de agua subiendo por cada incremento de agua añadido, incluyendo los valores intermedios entre valores sucesivos de volumen y altura, pero sin visualizar las variables pasando por estos valores.
Covariación continua suave	Imagina el volumen y la altura del agua variando suavemente en intervalos simultáneos, mientras anticipa que dentro de cada intervalo la cantidad del agua y la altura del agua varían de forma continua y suave.

Fuente: Adaptado de Thompson y Carlson (2017)

Esta forma de representación de los niveles de razonamiento covariacional ofrece cierta claridad acerca de los comportamientos en cada nivel de razonamiento covariacional, sin embargo, aplica solo para el problema de la botella. Al analizar la bibliografía previamente discutida se pudo crear un compendio de comportamientos y tipos de respuestas generales, aplicables para los distintos problemas con los que se puede analizar el razonamiento covariacional.

El nivel de sin coordinación se distingue cuando los sujetos no visualizan las variables variando en tándem, es decir, se comprende que varía una u otra variable, pero no juntas (Kertil, et al., 2019). Para el nivel de precoordinación de valores los sujetos son conscientes de que cuando cambia una variable, también lo hace la otra (Carlson, et al., 2002), se considera que ambas variables varían de manera asincrónica (Castañeda-Ovalle y García-Rodríguez, 2023) por lo que no se anticipa la formación de pares ordenados entre variables. También es posible que se considere a las variables como dos funciones distintas dependientes de un mismo parámetro, por ejemplo, el tiempo (Kertil, et al, 2019). Si la metodología de análisis requiere la construcción de una gráfica que represente la relación entre las variables estudiadas, un comportamiento esperado para el nivel de precoordinación sería que los sujetos designen los ejes ordenados con las variables dependiente e independiente (Hamzah, et al., 2021).

En el nivel de coordinación gruesa de valores, se espera que se considere a las dos variables variando juntas (Paoletti y Moore, 2017; Jaber y Swidan, 2022; Bagossi, 2023; Castañeda-Ovalle y García-Rodríguez, 2023). El sujeto explica la relación entre las dos variables (Hamzah, et al., 2021; Bagossi, 2023), aunque percibe el cambio con un vínculo flojo (Jaber y Swidan, 2022). Estos comportamientos se pueden evidenciar en frases como ‘la altura aumenta conforme el volumen aumenta’ (Thompson y Carlson, 2017; Kertil, et al., 2019; Carlson, et al., 2002) o ‘la humedad cambia cuando cambia la temperatura’ (Bagossi, 2023).

En el nivel de coordinación de valores se ve el cambio en las variables como una relación lineal, no se considera la intensidad del cambio entre las variables (Kertil, et al., 2019). Se considera la relación entre la dirección y la cantidad de cambio entre las variables (Paoletti y Moore, 2017) es decir, se entiende que las variables cambien en la misma dirección aumenta-aumenta o disminuye-disminuye; o que cambien en direcciones contrarias aumenta-disminuye o disminuye-aumenta. Los comportamientos gráficos que se pueden esperar en este nivel es la creación de una colección discreta de pares ordenados (Jaber y Swidan, 2022; Castañeda-Ovalle y García-Rodríguez, 2023; Nava-Guzmán et al., 2023), así como la marcación de incrementos en la altura de las botellas o las imágenes donde se presenta el cambio (Paoletti y Moore, 2017).

Cuando se razona en el nivel de coordinación continua a trozos, se visualiza el cambio por segmentos de una variable respecto a la otra. En ocasiones esto puede derivar en un intercambio de las variables dependiente e independiente (Kertil, et al., 2019). Gráficamente, este comportamiento se puede visualizar en la construcción de segmentos de recta contiguos donde se ajuste la pendiente para indicar la razón de cambio (Johnson et al., 2017; Castañeda-Ovalle y García-Rodríguez, 2023). Finalmente, en el nivel de coordinación continua suave se imaginan las variables variando sincrónicamente y de forma continua (Johnson et al., 2017; Kertil et al., 2019; Castañeda-Ovalle y García-Rodríguez, 2023). La evidencia grafica de este razonamiento es la construcción de una curva suave respetando la concavidad y puntos de inflexión (Hamzah et al., 2021).

Conclusiones

El estudio del razonamiento covariacional se extiende a diferentes áreas de las matemáticas, especialmente enfocado en problemas de situaciones dinámicas. Estas situaciones o eventos dinámicos plantean un cambio coordinado entre dos variables o cantidades, la manera en que los estudiantes interpretan esta situación permite clasificar su razonamiento covariacional. El tipo de problemas utilizados para plantear estos eventos dinámicos son variados, se trata de problemas presentados de forma gráfica, como el problema del llenado de botellas o el problema de la rueda de la fortuna; o problemas presentados de forma descriptiva tales como el problema de la escalera que se desliza. El estudio del razonamiento covariacional se extiende también a problemas de áreas específicas, tales como el concepto de derivadas e integrales en cálculo o problemas aplicados de física como la Ley de Hooke.

La metodología de análisis de cada situación dinámica también difiere, ya sea pedir a los alumnos que dibujen una gráfica representando la variación entre dos cantidades o al describir la manera en que una variable cambia con respecto de otra; este análisis se puede llevar a cabo de manera virtual, apoyado de recursos tecnológicos como programas graficadores o realidad aumentada o mediante lápiz y papel. Independientemente del medio utilizado, el análisis del razonamiento covariacional comprende de la interpretación de las respuestas dadas por cada estudiante a la situación presentada, es en la explicación de su razonamiento donde se puede identificar ciertos comportamientos y acciones que corresponden con cada nivel de razonamiento covariacional.

Para la identificación de patrones en las respuestas y su correspondiente clasificación en los niveles de razonamiento covariacional se propone una guía resumida en donde se presentan las respuestas y comportamientos más comunes en el estudiantado clasificados en cada nivel. Esta guía de presenta en dos partes de acuerdo con el tipo de problema utilizado. La primera es una tabla donde se ejemplifican las frases y acciones que el estudiantado podría enuncias o realizar al resolver el problema del llenado de botellas. Esta tabla pretende servir como guía para clasificar el razonamiento covariacional al utilizar este evento dinámico, ya sea que se pida la construcción de una grafica o solo la descripción de la variación entre las variables volumen y la altura. La segunda guía es una propuesta para el análisis de las respuestas a eventos dinámicos en general. En ella se enlistan los comportamientos más comunes que podrían presentar los alumnos al razonar covariacionalmente en cada nivel.

Se pretende que ambas guías funcionen como ayuda y apoyo en futuras investigaciones para realizar una clasificación más acertada del razonamiento covariacional de los alumnos, independientemente de los problemas o metodologías utilizadas para su estudio. Con esta propuesta, se busca ampliar la literatura respecto al razonamiento covariacional y así promover el estudio de este y el impacto que este tiene sobre el desarrollo y comprensión de conceptos matemáticos avanzados.

Referencias

Alajmi, A. H., & Al-Kandari, M. M. (2022). Calculus 1 college students' concept of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(2), 251–268. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1798526

Antonini, S., & Lisarelli, G. (2021). Designing tasks for introducing functions and graphs within dynamic interactive environments. *Mathematics*, *9*(5), 572. https://doi.org/10.3390/math9050572

Avgerinos, E. & Remoundou, D. (2021). The Language of "Rate of Change" in Mathematics. *European Journal of Investigation in Health, Psychology and Education*, *11*(4), 1599-1609. https://doi.org/10.3390/ejihpe11040113

Bagossi, S. (2023). Engaging in covariational reasoning when modelling a real phenomenon: the case of the psychrometric chart. *Boll Unione Mat Ital*., 1-22. https://doi.org/10.1007/s40574-023-00375-7

Bojórquez, K., González-Quiñones, F. y Tarango, J. (2021). Tipificación de patrones en razonamiento covariacional en estudiantes de nuevo ingreso en la carrera de ingeniería. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, *12*, e1173. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v12i0.1173

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378. https://doi.org/10.2307/4149958

Castañeda-Ovalle, A., y García-Rodríguez, M. L. (2023). Procesos de razonamiento covariacional durante la integración cognitiva de conceptos de matemáticas y de física en la interpretación del gasto hidráulico. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, *14*, e1766. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v14i0.1766

Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L., & Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics*, *33*(3), 31-37. https://flm-journal.org/Articles/11A85FC0E320DF94C00F28F2595EAF.pdf

Hamzah, M. L., Prayitno, A. T., Taufik, A., y Nurhayati, N. (2022). Analysis of Middle School Students' Covariational Reasoning Skills in Modeling Function Charts Based on Self-Efficacy. En *UNISET 2021: Proceedings of the 2nd Universitas Kuningan International Conference on System, Engineering, and Technology, UNISET 2021,* 2 December 2021, Kuningan, West Java, Indonesia (pp. 231-247). European Alliance for Innovation. https://doi.org/10.4108/eai.2-12-2021.2320268

Jaber, O., & Swidan, O. (2022). *Characteristics of students' covariational reasoning in an augmented reality environment: a language-oriented analysis.* Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12), febrero 2022, Bolzano, Italy. https://hal.science/hal-03748392/document

Johnson, H. L., McClintock, E., & Hornbein, P. (2017). Ferris wheels and filling bottles: A case of a student's transfer of covariational reasoning across tasks with different backgrounds and features. *ZDM Mathematics Education*, *49*, 851-864. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0866-4

Kafetzopoulos, G.-I., & Psycharis, G. (2018). Conceptualization of function as covariation through the use of learning trajectories. En H.-G. Weigand, A. Clark-Wilson, A. Donevska-Todorova, E. Faggiano, N. Grønbæk, & J. Trgalova (Eds.), *Proceedings of the Fifth ERME Topic Conference (ETC 5) on Mathematics Education in the Digital Age (MEDA)* (pp. 139-146). University of Copenhagen. http://scholar.uoa.gr/sites/default/files/gpsych/files/erme_meda_2018a.pdf

Kertil, M. (2020). Covariational reasoning of prospective mathematics teachers: How do dynamic animations affect? *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, *11*(2), 312-342. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.652481

Kertil, M., Erbas, A. K., & Cetinkaya, B. (2019). Developing prospective teachers' covariational reasoning through a model development sequence. *Mathematical Thinking and Learning*, *21*(3), 207-233. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1576001

Martínez-Miraval, M. A., y García-Rodríguez, M. L. (2022). Razonamiento covariacional de estudiantes universitarios en un acercamiento al concepto de integral definida mediante sumas de Riemann. *Formación Universitaria*, *15*(4), 105-118. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062022000400105

Martínez-Miraval, M. A., y García-Rodríguez, M. L. (2023). El razonamiento covariacional y su papel en el estudio de la integral definida desde la resolución de problemas. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, (54), 154-171. http://dx.doi.org/10.17583/redimat.11419

Martínez-Miraval, M. A., García-Cuéllar, D. J., y García-Rodríguez, M. L. (2023). Razonamiento covariacional y técnicas instrumentadas en la resolución de un problema de optimización mediado por GeoGebra. *Journal of Research in Mathematics Education*, *12*(1), 56-81. https://doi.org/10.17583/redimat.11419

Mateus-Nieves, E., y Moreno, E. (2021). Desarrollo del pensamiento variacional para la enseñanza de nociones preliminares de cálculo. Una experiencia de aula en la educación básica. *Acta Scientiae*, *3*(*2*), 113-135. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5716

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given with a physical model. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 175–193). Mathematical Association of America. https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-013-9486-9

Nagle, C., Tracy, T., Adams, G., & Scutella, D. (2016). The notion of motion: Covariational reasoning and the limit concept. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(4), 573-586. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1262469

Nava-Guzmán, C. (2021). *Emociones de estudiantes de bachillerato durante el desarrollo del razonamiento Covariacional* [Tesis doctoral, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada].

https://mariosanchezaguilar.files.wordpress.com/2021/12/tesis_doctorado_cristian_nava_guzman.pdf

Nava-Guzmán, C., García González, M. S., & Aguilar, M. S. (2023). Connections between achievement emotions and covariational reasoning: The case of Valeria. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 18*(3), em0740. https://doi.org/10.29333/iejme/13180

Olsho, A., Zimmerman, C., Boudreaux, A., Smith, T. I., Eaton, P., & Brahmia, S. W. (2022). Characterizing covariational reasoning in physics modeling. En B. Frank, D. Jones y Ryan (Editores). *Proceedings of the Physics Education Research Conference* (pp. 335-340). American Association of Physics Teachers. https://doi.org/10.1119/perc.2022.pr.Olsho

Paoletti, T., y Moore, K. C. (2017). The parametric nature of two students' covariational reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 137-151. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.003

Purbaningrum, A., Safitri, T., y Pamungkas, S. (2020). Diseño de material de enseñanza con hojas de actividades estructuradas para optimizar las habilidades de razonamiento y la autoestima matemática de los estudiantes. *Jurnal Penelitian dan Pembelajaran Matematika*, *13*, 73–86. http://dx.doi.org/10.30870/jppm.v13i1.7222

Ramos, J. E. (2021). *Razonamiento covariacional de estudiantes de tercero de secundaria con respecto a funciones de variable continua y discreta* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú], Repositorio Institucional - Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio de tesis PCUP: https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/20652?show=full

Swan, M. (1985). *The language of functions and graphs*. Shell Centre Publications. https://www.mathshell.com/materials.php?item=lfg&series=tss

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics.

Tyburski, B. A., Drimalla, J., Byerley, C., Boyce, S., Grabhorn, J., & Moore, K. C. (2021) *From theory to methodology: guidance for analyzing students' Covariational reasoning*. https://bitly.ws/VzHa