



Métodos No Algebraicos para la Enseñanza de Límites en Cálculo: Un Enfoque Cualitativo

Erick Radaí Rojas Maldonado

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

radaí.rojas@umich.mx

Jaqueline Toscano Galeana

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

jaqueline.toscano@umich.mx

Área temática: Innovaciones curriculares

Resumen

Se postula una indagación cualitativa exhaustiva sobre la implementación de metodologías no algebraicas como paradigmas alternativos para la didáctica del concepto de límite en el cálculo diferencial. El límite, piedra angular de esta disciplina, constituye un escollo epistemológico para los estudiantes, quienes frecuentemente incurren en misconcepciones tales como la percepción de los límites como entelequias inalcanzables o la errónea equiparación con el valor funcional en un punto. Los enfoques ortodoxos, anclados en la manipulación algebraica, a menudo exacerbaban dichas dificultades al priorizar la destreza procedural sobre la aprehensión conceptual, desatendiendo la diversidad de estilos cognitivos. Se propone un diseño investigativo cualitativo multifacético, abarcando estudios de caso, fenomenología, investigación-acción y análisis hermenéutico de corpora estudiantiles, con recolección de datos mediante entrevistas semiestructuradas, observaciones áulicas y cuestionarios abiertos, procesados a través de un análisis temático riguroso. Los potenciales hallazgos auguran una mejoría en la comprensión conceptual, una reducción de la ansiedad matemática y un incremento en el compromiso estudiantil. Se concluye que las metodologías no algebraicas ostentan un potencial transformador para democratizar el acceso al concepto de límite, exhortando a futuras investigaciones que dilucidén su impacto longitudinal y su transferibilidad a contextos educativos heterogéneos.

Palabras Clave: Límites, Métodos no algebraicos, Comprensión conceptual, Enseñanza de cálculo, Representaciones gráficas



I. Introducción

El concepto de límite se erige como el bloque de construcción fundamental sobre el cual descansa la totalidad del cálculo. De hecho, la noción misma de límite sustenta conceptos críticos del cálculo como la continuidad, las derivadas y las integrales (Wu & Wu, 2020). La comprensión inicial de los límites por parte de un estudiante puede afectar significativamente su capacidad para comprender temas más avanzados dentro del cálculo. Si este concepto primario no se comprende bien, el aprendizaje posterior en cálculo y campos relacionados como el análisis real y la teoría de la medida se vuelve considerablemente más desafiante (Liang, 2016). Dada esta centralidad, los métodos empleados para introducir y enseñar límites merecen una cuidadosa consideración.

A pesar de su papel crucial, el concepto de límites a menudo presenta obstáculos de aprendizaje significativos para los estudiantes. La investigación indica que muchos estudiantes tienen dificultades con los conceptos básicos de cálculo, siendo los límites un área particularmente desafiante (Cornu, 1991; Domondon et al., 2023; Vinner, 2002). Los enfoques tradicionales para la enseñanza de límites a menudo se basan en gran medida en la manipulación algebraica. Si bien el álgebra es innegablemente una herramienta vital en matemáticas, una dependencia excesiva de ella durante la introducción inicial a los límites podría no adaptarse a todos los estilos de aprendizaje y podría conducir a una comprensión procedural desprovista de una comprensión conceptual más profunda (Artigue, 1988; Sari, 2017). Esto sugiere la necesidad de explorar estrategias pedagógicas alternativas que puedan fomentar una comprensión más sólida y accesible de los límites para una gama más amplia de estudiantes.

La exploración de métodos no algebraicos, como los que utilizan gráficos, tablas numéricas y razonamiento intuitivo, resulta prometedora para mejorar la experiencia de aprendizaje de los límites. Estos enfoques alternativos podrían ofrecer vías más intuitivas para comprender este concepto abstracto. La secuencia tradicional de conceptos matemáticos en el currículo podría crear inadvertidamente obstáculos para algunos estudiantes. Al considerar enfoques que resten importancia al rigor algebraico inmediato, los profesores podrían desbloquear vías para los estudiantes que inicialmente encuentran el razonamiento visual o numérico más accesible (*Finding Limits: Numerical and Graphical Approaches | Honors Pre-Calculus Class Notes | Fiveable | Fiveable*, s/f; *Students' Concepts of Limits*, s/f; Wakhata et al., 2023). Por lo tanto, el presente, tiene como objetivo incorporar un nuevo método cualitativo para enseñar y aprender límites en cálculo, uno que minimice conscientemente la dependencia inicial de la manipulación algebraica. El enfoque central estará en comprender las experiencias de los estudiantes con este método y evaluar su eficacia en la promoción de una comprensión conceptual más profunda de

los límites.

II. Revisión de la Literatura Existente

Un cuerpo sustancial de investigación cualitativa ha profundizado en las complejidades de la comprensión de los límites por parte de los estudiantes, revelando conceptualizaciones comunes y conceptos erróneos persistentes. Estos estudios resaltan consistentemente los desafíos que enfrentan los estudiantes para comprender este concepto fundamental (Aquere et al., 2009). Entre los conceptos erróneos frecuentemente identificados se encuentra la noción de que un límite es un valor inalcanzable, algo a lo que una función se acerca pero nunca alcanza por completo. Los estudiantes también pueden ver un límite como una mera aproximación o un límite, en lugar del valor preciso al que tiende la función. Además, a menudo surge confusión con respecto a la relación entre el límite de una función en un punto específico y el valor real de la función en ese mismo punto (Aquere et al., 2009; Denbel, 2014; Sezgin Memnun et al., 2017). Algunos estudiantes asumen incorrectamente que el límite siempre debe ser igual al valor de la función, o que una función debe estar definida en un punto para tener un límite allí. También se ha observado una tendencia a generalizar excesivamente el método de sustitución para evaluar límites, lo que lleva a errores en los casos en que la sustitución directa produce formas indeterminadas (Sulastri et al., 2022). Y es que en el castellano, se entiende al límite como borde o frontera, siendo éste una situación diferente en matemáticas.

La investigación sugiere además que los estudiantes a menudo desarrollan comprensiones intuitivas y dinámicas de los límites, viéndolos como procesos de acercamiento a un valor en lugar de objetos estáticos (*Students' Concepts of Limits*, s/f). Estas ideas informales, aunque potencialmente útiles para construir una intuición inicial, a veces pueden entrar en conflicto con las definiciones más formales y rigurosas de los límites, obstaculizando una comprensión más profunda (*Students' Concepts of Limits*, s/f). Por ejemplo, los estudiantes podrían pensar en los límites en términos de sustitución mecánica, centrándose en el aspecto procedural en lugar del concepto subyacente (Thabane, s/f). Estos conceptos erróneos arraigados indican que los métodos de enseñanza tradicionales, que a menudo priorizan las técnicas algebraicas y las definiciones formales, pueden no abordar adecuadamente las dificultades conceptuales fundamentales que encuentran los estudiantes.

En respuesta a estos desafíos, investigadores y educadores han explorado varios métodos no algebraicos para fomentar una comprensión más intuitiva de los límites. Los enfoques gráficos se defienden con frecuencia como una herramienta poderosa para visualizar el comportamiento de las funciones a medida que la variable de entrada se acerca a un valor particular (Sari, 2017). Al examinar la gráfica de una función, los estudiantes pueden observar la tendencia de los valores



de salida a medida que los valores de entrada se acercan cada vez más a un punto específico, lo que les permite estimar el límite visualmente (*Estimating limit values from graphs (article)* | Khan Academy, s/f). El concepto de límites unilaterales, acercándose desde la izquierda y la derecha, también se puede ilustrar eficazmente utilizando gráficos (*Estimating limit values from graphs (video)* | Khan Academy, s/f). Las tablas numéricas ofrecen otro método no algebraico valioso para aproximar límites. Al evaluar la función en valores de entrada que se acercan progresivamente al valor objetivo desde ambos lados, los estudiantes pueden observar los valores de salida correspondientes e identificar el valor al que parecen acercarse (*Limits and continuity* | Calculus 1 | Math | Khan Academy, s/f). Esta exploración numérica puede proporcionar una sensación tangible de la naturaleza de "acercamiento" de los límites. Además, el uso de explicaciones intuitivas, analogías del mundo real y marcos conceptuales puede ayudar a construir una base sólida para la comprensión de los límites antes de profundizar en las definiciones algebraicas formales (1.1: *Introduction to concept of a limit* - Mathematics LibreTexts, s/f). Por ejemplo, enmarcar los límites como predicciones de puntos no observados basadas en el comportamiento de los puntos vecinos puede resonar con el razonamiento intuitivo de los estudiantes (*An Intuitive Introduction To Limits* – BetterExplained, s/f). También se ha destacado que el énfasis en las representaciones geométricas es crucial para desarrollar una comprensión conceptual significativa de los conceptos de cálculo, incluidos los límites (Sari, 2017).

El desarrollo de una comprensión conceptual sólida de los límites no es meramente un ejercicio académico; es fundamental para el éxito futuro de los estudiantes en cálculo y estudios matemáticos avanzados relacionados (Denbel, 2014). Sin una comprensión sólida de los conceptos, los estudiantes pueden tener dificultades con temas posteriores como continuidad, diferenciación e integración (Liang, 2016). Cultivar la comprensión conceptual permite a los estudiantes construir representaciones mentales coherentes de las ideas matemáticas y conectar nueva información con sus marcos de conocimiento existentes (Denbel, 2014). El uso de representaciones visuales y geométricas, en particular, puede desempeñar un papel importante en el fomento de este nivel más profundo de comprensión (Sari, 2017). Por lo tanto, los enfoques pedagógicos que priorizan el desarrollo conceptual sobre la manipulación algebraica rutinaria se alinean con los objetivos más amplios de la educación matemática, con el objetivo de promover un aprendizaje más significativo y duradero.

III. Metodología Propuesta para Futuras Investigaciones

Para abordar las brechas identificadas, se proponen diversas metodologías de investigación cualitativa que permitan una exploración profunda de las experiencias de los estudiantes con

métodos no algebraicos para aprender límites.

- Estudios de caso: Investigaciones detalladas de grupos pequeños de estudiantes que aprenden límites a través de enfoques visuales, numéricos e intuitivos, con un seguimiento longitudinal para observar la evolución de su comprensión.
- Estudios fenomenológicos: Exploración de las experiencias vividas por los estudiantes al enfrentarse al concepto de límite sin la tradicional base algebraica, buscando comprender la esencia de este fenómeno de aprendizaje desde su perspectiva.
- Investigación-acción: Implementación de intervenciones pedagógicas basadas en métodos no algebraicos en el aula, con una reflexión sistemática sobre su impacto en el aprendizaje de los estudiantes y la práctica docente.
- Análisis cualitativo de datos existentes: Revisión de trabajos de estudiantes, transcripciones de entrevistas o foros de discusión en línea para identificar patrones en la comprensión de límites cuando se utilizan enfoques no algebraicos.

En estas investigaciones, la recopilación de datos podría incluir entrevistas semiestructuradas con estudiantes y profesores, observaciones en el aula, análisis de trabajos de los estudiantes y el uso de cuestionarios abiertos para explorar sus concepciones. El análisis de los datos se realizaría mediante técnicas de análisis temático para identificar patrones y significados emergentes.

IV. Discusión:

Implicaciones para la Investigación y la Práctica Educativa

La investigación futura en métodos no algebraicos para la enseñanza de límites podría generar hallazgos significativos con implicaciones tanto teóricas como prácticas.

- Comprensión conceptual: Investigar si un enfoque inicial no algebraico conduce a una comprensión más profunda y duradera del concepto de límite, abordando las concepciones erróneas comunes de manera más efectiva.
- Engagement y actitud: Explorar si la reducción de la dependencia inicial del álgebra aumenta el interés y la confianza de los estudiantes en el aprendizaje del cálculo.
- Transición al álgebra: Analizar las estrategias más efectivas para integrar los métodos no algebraicos con la formalización algebraica, facilitando una transición fluida y significativa.
- Diseño curricular: Informar el desarrollo de currículos de cálculo que incorporen de manera sistemática métodos no algebraicos en la enseñanza de límites .
- Formación docente: Identificar las necesidades de formación de los profesores para implementar con éxito estos enfoques pedagógicos alternativos .

Sin embargo, también es importante investigar los posibles desafíos asociados con la enseñanza de límites sin álgebra, como la necesidad de asegurar una base algebraica sólida para temas posteriores del cálculo y la posible dificultad para resolver ciertos tipos de problemas de límites que requieren manipulación algebraica.

Discusión de Posibles Hallazgos

La implementación de un enfoque de enseñanza que introduzca los límites sin una dependencia inicial del álgebra podría generar varios beneficios para el aprendizaje de los estudiantes. Al centrarse primero en las representaciones visuales a través de gráficos, los estudiantes podrían desarrollar una comprensión más intuitiva del concepto de acercarse a un valor (Wu & Wu, 2020). Esta intuición visual, junto con la exploración de patrones numéricos en tablas, podría potencialmente hacer que la idea abstracta de un límite sea más concreta y accesible, lo que llevaría a una mejor comprensión conceptual. Además, una introducción menos intensiva en álgebra podría aumentar la participación de los estudiantes y reducir la posible ansiedad a menudo asociada con la manipulación simbólica formal en cálculo (*calculus - Conceptual Understanding behind a Limit - Mathematics Stack Exchange*, s/f). Al desmitificar las etapas iniciales del aprendizaje de los límites, los estudiantes podrían desarrollar una actitud más positiva hacia la materia. Los métodos no algebraicos, particularmente los enfoques visuales y numéricos, también pueden ser más efectivos para abordar directamente los conceptos erróneos comunes sobre los límites, como si un límite alguna vez se alcanza o su relación precisa con el valor de la función en un punto específico (Denbel, 2014). Incluso los propios docentes podrían beneficiarse de la exploración de estos enfoques alternativos, obteniendo potencialmente una comprensión más profunda y matizada del concepto de límite (Flores & Park, 2016). La investigación sugiere que el empleo de múltiples representaciones en la enseñanza puede conducir a mejoras significativas en la comprensión de los límites por parte de los estudiantes. Sin embargo, enseñar límites sin álgebra también presenta desafíos potenciales. Si bien construir una base conceptual sólida es crucial, el cálculo en su conjunto es inherentemente algebraico (Wu & Wu, 2020). Por lo tanto, un desafío significativo sería la eventual transición e integración con las definiciones y técnicas algebraicas formales que son necesarias para resolver una gama más amplia de problemas de límites y para progresar a temas de cálculo más avanzados (*Calculus 1 - Introduction to Limits - YouTube*, s/f). Ciertos tipos de problemas de límites simplemente se resuelven de manera más eficiente utilizando la manipulación algebraica. También existe la posibilidad de que los estudiantes que se sientan muy cómodos con la intuición visual o numérica puedan enfrentar resistencia o dificultad cuando finalmente necesiten



interactuar con el formalismo algebraico más abstracto. Además, es importante reconocer los posibles obstáculos epistemológicos que podrían surgir, como la comprensión de los números reales e infinitos por parte de los estudiantes, que aún podrían plantear desafíos independientemente del método de enseñanza inicial. Si bien el objetivo es minimizar la dependencia algebraica inicial, evitar por completo el pensamiento algebraico podría no ser factible, especialmente considerando que los estudiantes a menudo tienen concepciones preexistentes relacionadas con ecuaciones y funciones. La investigación también indica que los estudiantes a menudo tienen dificultades con la manipulación algebraica en general, lo que podría afectar su capacidad posterior para manejar los aspectos algebraicos de los límites.

Los métodos no algebraicos, particularmente las representaciones visuales, ofrecen una forma potencialmente más intuitiva de navegar por las complejidades de la "paradoja infinitesimal": la idea de acercarse a un límite sin necesariamente alcanzarlo . Al observar un gráfico, los estudiantes pueden ver cómo el valor de la función se acerca cada vez más a un valor y particular a medida que el valor x se acerca a un cierto punto, sin necesariamente alcanzar ese valor y exacto. De manera similar, las tablas numéricas pueden demostrar la creciente precisión del límite a medida que los valores de entrada se acercan progresivamente al objetivo, lo que ilustra el concepto de convergencia. Históricamente, el desarrollo del concepto de límite surgió del razonamiento gráfico intuitivo y la idea de aproximación continua (Wu & Wu, 2020). Por lo tanto, estos métodos podrían proporcionar un punto de entrada más natural y menos paradójico para los estudiantes.

Los hallazgos de este estudio podrían tener implicaciones significativas para la educación matemática. La investigación podría informar el diseño de los currículos de cálculo, sugiriendo potencialmente un mayor énfasis en la incorporación de métodos visuales y numéricos en la introducción inicial a los límites. Esto podría requerir ajustes en los programas de formación y desarrollo profesional de los docentes para equipar a los educadores con estrategias efectivas para enseñar los límites conceptualmente sin una dependencia primaria del álgebra. En última instancia, tal cambio en el enfoque pedagógico podría conducir a mejores tasas de éxito de los estudiantes en cálculo y fomentar una experiencia de aprendizaje más positiva y accesible.

La sección de discusión del informe de investigación completo profundizará en estos posibles hallazgos, interpretándolos en el contexto de la literatura existente. Resumirá los hallazgos clave, los comparará con investigaciones previas, discutirá cualquier resultado inesperado, reconocerá las limitaciones del estudio y sugerirá vías para futuras investigaciones en esta área.

V. Conclusión



Este estudio busca explorar el potencial de la enseñanza y el aprendizaje de los límites en cálculo a través de un método que inicialmente minimiza la dependencia de la manipulación algebraica, centrándose en cambio en enfoques visuales, numéricos e intuitivos. Los beneficios potenciales de tal método incluyen una mejor comprensión conceptual, una mayor participación de los estudiantes y una forma más efectiva de abordar los conceptos erróneos comunes sobre los límites. Si bien los desafíos como la eventual integración con los métodos algebraicos y la naturaleza del cálculo necesitan una cuidadosa consideración, la exploración de introducciones no algebraicas resulta prometedora para hacer que este concepto fundamental sea más accesible a una gama más amplia de estudiantes. Las investigaciones futuras podrían investigar el impacto a largo plazo de este enfoque en el éxito de los estudiantes en cursos de cálculo posteriores y explorar su efectividad en diferentes poblaciones de estudiantes y contextos de aprendizaje. En última instancia, la exploración continua de estrategias pedagógicas innovadoras es crucial para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos fundamentales como los límites.

Bibliografía

- 1.1: *Introduction to concept of a limit - Mathematics LibreTexts*. (s/f). Recuperado el 24 de marzo de 2025, de https://math.libretexts.org/Courses/Mount_Royal_University/Calculus_for_Scientists_I/2%3A_Limit_and_Continuity_of_Functions/1.1%3A__Introduction_to_concept_of_a_limit
- An Intuitive Introduction To Limits – BetterExplained*. (s/f). Recuperado el 24 de marzo de 2025, de <https://betterexplained.com/articles/an-intuitive-introduction-to-limits/>
- Aquere, S., Engler, A., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M., Gregorini, I., & Henzenn, N. (2009). UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LÍMITE. *Premisa*, 14–24.
- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 281–308.
- calculus - Conceptual Understanding behind a Limit - Mathematics Stack Exchange*. (s/f). Recuperado el 24 de marzo de 2025, de <https://math.stackexchange.com/questions/1324860/conceptual-understanding-behind-a-limit?newreg=88aafb0cfb5141b198d7d90983de445f>
- Calculus 1 - Introduction to Limits - YouTube*. (s/f). Recuperado el 24 de marzo de 2025, de <https://www.youtube.com/watch?v=YNstP0ESndU>
- Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153–166). Kluwer.
- Denbel, D. G. (2014). Journal of Education and Practice www.iiste.org ISSN. *Online*, 5. www.iiste.org
- Domondon, C., Pardo, C., & Rin, E. (2023). ANALYSIS OF DIFFICULTIES OF STUDENTS IN LEARNING CALCULUS. *Science International, Special*. https://www.researchgate.net/publication/368810478_ANALYSIS_OF_DIFFICULTIES_OF_STUDENTS_IN_LEARNING_CALCULUS
- Estimating limit values from graphs (article) | Khan Academy*. (s/f). Recuperado el 24 de marzo de 2025, de <https://www.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-limits-new/ab-1>



3/a/approximating-limit-values-from-a-graph

Estimating limit values from graphs (video) | Khan Academy. (s/f). Recuperado el 24 de marzo de 2025, de <https://www.khanacademy.org/math/ap-calculus-ab/ab-limits-new/ab-1-3/v/limits-from-graphs>

Finding Limits: Numerical and Graphical Approaches | Honors Pre-Calculus Class Notes | Fiveable | Fiveable. (s/f). Recuperado el 24 de marzo de 2025, de <https://library.fiveable.me/honors-pre-calc/unit-12/1-finding-limits-numerical-graphical-approaches/study-guide/DpseKQxIhhjl6iXX>

Flores, A., & Park, J. (2016). Students' guided reinvention of definition of limit of a sequence with interactive technology. *Contemporary Issues in Technology & Teacher Education*, 16(2), 110–126.

Liang, S. (2016). Teaching the Concept of Limit by Using Conceptual Conflict Strategy and Desmos Graphing Calculator. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, 2(1), 35–48. www.ijres.net

Limits and continuity | Calculus 1 | Math | Khan Academy. (s/f). Recuperado el 24 de marzo de 2025, de <https://www.khanacademy.org/math/calculus-1/cs1-limits-and-continuity>

Sari, P. (2017). GeoGebra as a Means for Understanding Limit Concepts. *Southeast Asian Mathematics Education Journal*, 7(2), 71–84. <https://doi.org/10.46517/SEAMEJ.V7I2.55>

Sezgin Memnun, D., Aydin, B., Ozbilen, O., & Erdogan, G. (2017). The abstraction process of limit knowledge. *Kuram ve Uygulamada Egitim Bilimleri*, 17(2), 345–371. <https://doi.org/10.12738/estp.2017.2.0404>

Students' Concepts of Limits. (s/f). Recuperado el 24 de marzo de 2025, de <https://mste.illinois.edu/murphy/Papers/LimitConceptsPaper.html>

Sulastri, R., Suryadi, D., Prabawanto, S., & Cahya, E. (2022). Epistemological Obstacles on Limit and Functions Concepts: A Phenomenological Study in Online Learning. *MATHEMATICS TEACHING RESEARCH JOURNAL*, 84(5). <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1382285.pdf>

Thabane, J. L. (s/f). *STUDENTS' UNDERSTANDING OF THE LIMIT CONCEPT IN A FIRST YEAR CALCULUS COURSE.*

Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library*, (Vol. 11, pp. 65–81). Springer. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_5

Wakhata, R., Balimuttajjo, S., & Matarutinya, V. (2023). *Enhancing the Learning of Limits of Functions Using Multiple Representations*. 15(2).

Wu, W., & Wu, W. (2020). A Definite Explanation of the Concept of Limit in Teaching. *Creative Education*, 11(12), 2832–2836. <https://doi.org/10.4236/CE.2020.1112208>